

Quenstedt



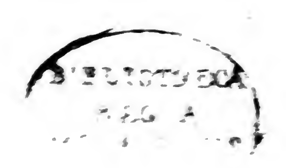
Methode der Krystallographie.

Ein Lehrbuch für Anfänger und Geübte

von

Fr. Aug. Quenstedt,
Professor extr. zu Tübingen.

Tübingen,
bei C. F. Osiander.
1840.



Seinem Lehrer

dem

Professor Weiss

der

Verfasser.

Vorrede.

Ueber das Verhältnifs der Krystallographie zu den bildenden Wissenschaften.

Anschauung, Gedächtnifs und Urtheil sind die drei geistigen Stufenkräfte, welche unsere Bildungsanstalten im jugendlichen Geiste billig alle gleich harmonisch entfalten sollten. In den bessern Volksschulen Deutschlands hat man diefs schon längst erkannt; man weckt die Anschauung der Jünglinge an Mathematik und Krystall-Modellen, übt das Gedächtnifs durch sprachlich naturhistorische Gegenstände, und schärft das Urtheil mittelst Bildung inhaltsvoller Sätze. Allein es gab und gibt theilweis noch eine Zeit, wo man die organische Entwicklung des Geistes allein durch philologische Bildung angemessen vollenden zu können wähnte, und allerdings hatte die Philologie durch Jahrtausende hindurch sich wirklich zur gelungensten Methode heraufgearbeitet, mit der sich keine andere Disciplin messen konnte. Da-

)(

her wurde es der Philologie und ihren zahllosen Anhängern leicht, an jeder andern Methode, die irgendwo aufkeimte, entschiedene Mängel aufzudecken, wenn auch die Unkenntnifs am Inhalte nichts zu tadeln wufste. Endlich erkannten jedoch einsichtsvolle Männer, dafs bei einer solchen formellen Bildung zwar das Gedächtnifs nie, viel mehr schon das Urtheil, die Anschauung aber ganz vernachläfsigt sei. Durch Mathematik und Physik wollte man daher diesen Mängeln abhelfen. Von Mathematik versprach man sich besonders viel, weil sie schon zu Plato's Zeit ihrem alten Rufe, als exakte Wissenschaft Verstand und Anschauung zu bilden, in hohem Grade entsprochen hatte. Allein der Erfolg rechtfertigte die Erwartungen nicht. Wenn auch Einige schnell den Uebrigen voraus eilten, so waren gerade diese die für Mathematik gebornen Talente, welche in den übrigen philologischen und historischen Disciplinen sich nur selten in die Reihen der Ersten hinaufzuschwingen vermochten. Die Praxis hatte also bewiesen, dafs der Mensch für eine philologisch historische Bildung geboren sei, jede andere Geistesrichtung sich nur ausnahmsweise selbstständige Wege bahne. Auffallend mufste jedoch an diesem Erfahrungssatze bleiben, dafs in dem nachbarlichen Frankreich entgegengesetzte Beobachtungen gemacht wurden. Denn dort scheinen gerade die exakten Wissenschaften noch

heute vor allen Anklang zu finden. Dieser offenbare Widerspruch mufste also eine andere Lösung finden.

Der erste Grund liegt allerdings in einem Vorwurfe, welcher die mathematische Darstellung betrifft. Unsere heutige Mathematik, als Mittel zu einer höhern Mechanik, ist nicht mehr für Jugendbildung die, welche Euclid und Archimed lehrten, sondern Jener Arbeiten nur als Elemente betrachtend, eilen nicht selten unsere heutigen Lehrer schnell über die beschreibenden Anfänge hinweg zum sogenannten Calcul, wo der Anschauung, wenn nicht gar nichts, so doch nur sehr wenig geboten wird, und selbst der Verstand in eine Form geprefst ist, die bei einem streng gebundenen Gange dem beweglichen Geiste nur wenig Nahrung bietet. Daher sind die allgemeinen Klagen über Dürre und Trockenheit des Faches nicht ganz ungerecht. Auf den Inhalt der Mathematik werden solche Klagen aber nur mit Unrecht angewendet, denn bei zweckmäfsiger Wahl in den einzelnen Abschnitten, namentlich in den beschreibenden Zweigen, kann diefs Feld für Anschauung und Urtheil allerdings grofse Früchte tragen. Dafs man jedoch solcher Früchte bislang nur wenig geerndtet, hat seinen zweiten und tiefern Grund in dem geringen Ernste, mit welchem die meist nur noch philologisch gebildeten Vorstände höherer Bildungsanstalten ein anderes Element, als ihre eigene Entwicklung ent-

hält, in den Studienplan aufnehmen. Einerseits kann man hier die Individualitäten in Schutz nehmen, da man von Keinem erwarten darf, anders zu handeln, als ihm seine Einsicht erlaubt. Dennoch entscheiden höhere philosophische Gründe, daſs eine wahrhafte Geistesentwicklung nur durch harmonische Ausbildung zu Stande kommen kann; harmonische Ausbildung nennen wir aber die, wo jede Disciplin an gehöriger Stelle und mit dem ihr gebührenden Nachdruck der individuellen Geistesstufe angemessen übertragen wird. Theilweis hat man dieſs auch wohl anerkannt, und dann sogleich lebendig das Bedürfniſs gefühlt, daſs die beschreibenden Naturwissenschaften, (Zoologie, Botanik, Mineralogie,) welche den Beschauer unwillkührlich zur allgegenwärtigen Weltmacht erheben, und zum Nachdenken erregen, ein nothwendiges Glied der Bildungskette ausmachen müſsteu. Man nahm sie daher auf, vergaſs aber dabei, daſs die eine Wissenschaft nur auf Kosten der andern gedeihen könne. Der Geist wurde nach wie vor durch die allgebräuchlichen Fächer rücksichtslos angespannt, der angeborne Sinn für Naturanschauung in dem jugendlichen Geist erstickt, und zwar um so leichter, da der Schüler schon im Voraus wuſste, daſs die Beschäftigungen mit der Natur nur Lieblingsfächer seien, zu welcher Meinung die Umsicht des Lehrers nicht selten selbst den Beweis

liefert. Soll daher eine wahrhaft zweckmäſsige Geistesbildung bei unserer Jugend Wurzel fassen, so müssen ohne Rücksicht auf spätere praktische Lebenszwecke die einzelnen zu lehrenden Zweige der Sache selbst willen abgewogen werden. Folgen wir bei dieser Erwägung der Natur, so gehen wir nicht irre. Die Sphäre der Natur zerfällt aber in zwei groſse Hälften: in die geistige und körperliche, deren Vereinigung dann die wahrhafte praktische Lebensseite wird. Die philosophisch-historischen Wissenschaften, die Philosophie in ihrem heutigen Gewande, gehören mehr der geistigen, Physik, Zoologie, Botanik und Mineralogie mehr der körperlichen Hälfte an, (zwei Seiten, die durch Philosophie und Geologie am allgemeinsten bezeichnet werden), während der moralisch religiöse Inhalt des Menschen erst durch das Umfassen beider zu seiner Wahrheit entwickelt werden kann. Wie in einem embryonischen Keime schon die Vollendung der künftig sich entfaltenden Gestalt nach allen Seiten hin vorbereitet liegt, so müssen auch im jugendlichen Geiste jene beiden Richtungen, welche den Menschen zum Menschen machen, gehörig vorbereitet werden. Wird in der Jugendbildung eines dieser Organe erstickt, so kann es sich später nicht entfalten, sondern wird ausgeschieden; der Sinn für diese Richtung stirbt ab, und darin liegt denn auch der Grund, daſs in spätern Stufenaltern

für gewisse Disciplinen nur mit grofsen Schwierigkeiten Sinn erweckt werden kann, ja, der Versuch wird fast stets mifslingen, wenn die Virtualität des Lehrers nicht kräftig genug ist, durch gründliches Erfassen der Sache die schlummernden Regungen des Schülers anzufachen. Wie aber in einem Keime einige Organe früher, andere später zu ihrer vollern Gestalt heraufentwickelt werden, so mufs auch der Lehrer diejenigen Zweige jener beiden Richtungen, welche dem Stufenalter am angemessensten sein möchten, mit wohlgeprüfter Auswahl und in viel überdachter Form darreichen. Auch hier wird er bald erkennen, dafs für die ersten Stufenalter mehr die Körper-, für die spätern Jahre aber mehr die Geistes-Seite hervorzuheben ist. Beide müssen aber zuerst in einem anschaulichen Gewande vorgetragen sein, weil die Anschauung zu den unmittelbarsten Geisteskräften gehört, die der Jugend vorzugsweise eigen sind; erst wenn die Anschauung erstarkt, soll man dem Gedächtnifs und Urtheil gröfsere Lasten anvertrauen. Denn sobald das Kind zum Selbstbewufstsein erwacht, ist die Anschauungskraft das einzige Mittel, durch welches ihm die Fülle der Geistes- und Körperwelt ihrem ganzen Inhalte nach vorgeführt wird. Ohne Anschauung fehlt ihm der sichere Boden, auf dem allein es sich kräftig bewegen kann. Wird ihm dieser Boden entzogen, so wird es zwar durch allseitige

Hülfe vor Untersinken bewahrt, allein nach und nach einen künstlichen Boden gewinnend, lernt es umgekehrt seine alte Heimath verkennen, und das, was dem ersten Kindesalter leicht wurde, kann später nur durch eine ungewohnte Kraftanstrengung unvollkommen erreicht werden. Daher sollte die volksthümliche Bildung in der anschaulichen Lehrmethode ihre erste Basis suchen, und von hier aus zum Gedächtnifs und dem Urtheile fortschreiten. Das beste Material zur Uebung der Anschauungskräfte bieten unwidersprechlich die Naturwissenschaften dar, weil hier sich an den ideellen Begriff ein manifestes Daseyn knüpft. Die Vorschule des Lebens, das Kindesalter, nimmt zuerst an seines Gleichen Interesse, und mit leichten Apparaten der Anschauung ausgerüstet, greift es in die Sphäre des thierischen Lebens über, nimmt Antheil an den Gegenständen des Mitgefühls, mit denen es Freude und Schmerz theilt. Das Pflanzenleben liegt der kindlichen Naturanschauung schon ferner, allein die Theilnahme daran steigert sich um so mehr, sobald das ideellere Pflanzenleben in seiner empfindungslosen Entwicklung von dem leidenschaftsvollen Thierleben unterschieden werden kann. Hier lernt es eine Reihe wohl begränzter Formen kennen, die das Knabenalter nach und nach an eine natürliche Logik gewöhnen. Mit diesem Bestreben nach einer konsequent mathematisch logischen Eintheilung tritt der

Jüngling in das Gebiet der krystallinischen Formen ein, deren Wiedererkennung schon geschärfteren Sinn verlangt, als diefs bei Botanik und Zoologie der Fall war. Allein hat er seine Beobachtungsgabe einmal an dem zahllosen Pflanzenreichthume versucht, so wird er sich auch mit Glück in die unendlichen Uebergänge der Mineralspecies finden. Krystallographie wird ihm jetzt ein ganz neues Feld eröffnen, welches zu bebauen er erst im 8—10ten Jahre heranreift. Dem Lehrer nun für diese Lebensperiode ein zweckmäfsiges Werk zu liefern, das andern methodischen Büchern dereinst zur Seite gestellt werden dürfte, ist die Aufgabe nachfolgender Schrift, (besonders der ersten Paragraphen derselben,) die durch einen ersten Versuch freilich nur den Weg andeuten kann. So fest wir von dieser Ansicht durchdrungen sind, so gewifs wird sich auch der Widerspruch dagegen erheben, allein die Zeit wird lehren, dafs alle Widersprüche nur auf Mifsverständnissen beruhen. Denn hier möchte sich wohl der scheinbar paradoxe Satz bethätigen, dafs es leichter ist, einen Jüngling von 12 Jahren gründlich Krystallographie zu lehren, als einen Erwachsenen, dessen Anschauungstalente durch Vernachlässigung in der Jugend erstickt sind. Die Krystallographie (und so auch nachstehendes Werk), setzt zu ihrem Verständnifs nur die allerersten Elemente der Mathe-

matik voraus, da Mathematik und Krystallographie sich ganz wesentlich unterscheiden. Die Mathematik entwickelt sich Zahlengesetze und wendet diese auf Raum und Zeit an, und zwar so, dafs die Sätze der Anschauung viel leichter zugänglich sind, als dem Verstande, dafs sie also die Anschauung nur wenig üben. Die Krystallographie beschäftigt sich mit der organischen Spaltung des Raumes, der nicht etwa durch feststehende Flächen in starre Formen abgegrenzt wird, sondern dessen Grenzebenen stetig beweglich gedacht, einen fortwährend anders und anders gestalteten Raum einschliefsen. Was hier dem Verstande leicht zugänglich ist, wird umgekehrt der Anschauung sehr schwer, diese wird daher vor allen Geisteskräften geübt. Um diese Idee gründlich zu erfassen, bedarf es nicht einer unendlichen Anzahl von Modellen und Figuren, deren umständliche Beschreibung der Anschauung nur wenig nützt, sondern bedarf es nur eines plastischen Materials, das nach den gegebenen Regeln zerschnitten mit grosser Leichtigkeit selbst die schwierigsten Sätze zur gründlichsten Anschauung bringen wird. Der Lehrer findet in den einfachsten Grundsätzen ein wohl geordnetes Material, was den Scharfsinn, wie die Anschauung erweckt, und den Schüler zur Selbstentwicklung fortleitet.

Wie aber jeder methodische Gang nicht blos

für Anfänger, sondern auch für Geübte, manche lehrreiche Seite enthalten mufs, so haben wir auch darauf gesehen, dafs die Form nicht auf Kosten der Gründlichkeit gediehen ist. Wir haben vielmehr bei Allem den höchsten Standpunkt der Wissenschaft im Auge gehabt. Wenn das Werk selbst sich nicht vieler neuen Entdeckungen zu rühmen hat, so mufs man bedenken, dafs der Verfasser einen Weiss zum Lehrer, und einen Hauy, Mohs, Neumann und Naumann zu Vorgängern hatte. Den Geist des berühmten Lehrers wird man nicht verkennen, allein man wird auch in dem Bestreben nach einer sichern Form dem eigenen Nachdenken ein nachsichtiges Urtheil wiederfahren lassen, was allein mich bestimmen konnte, mein noch nicht ganz gereiftes Werk der Oeffentlichkeit zu übergeben, da der Beruf als Lehrer es mir zur doppelten Pflicht macht.

Inhaltsanzeige.

A.

Zonenlehre.

Kapitel I.

Betrachtung des Krystallraumes.

§. 1.

Jeder wohlgebildete Krystall ist, gleich einer mathematischen Figur, von Ebenen (Krystallflächen) begränzt.

Zwar sind diese Krystallflächen, die unter sich gruppenweis eine verschiedene physikalische Beschaffenheit haben (matt, glänzend, glatt, gestreift), nicht blos, wie bei mathematischen Körpern, starre äussere Begränzungsflächen, sondern sie stehen mit den inneren Eigenschaften des Krystalls in engster Beziehung. So geht z. B. den meisten Krystallflächen durch den ganzen Krystallkörper ein Blätterbruch (blättriger Bruch) parallel. Allein bei der rein formellen Betrachtung wird zunächst von diesen Kennzeichen abgesehen.

§. 2.

Die Ebenen eines vollflächigen Krystalls lassen sich in zwei Gruppen sondern, von denen die eine der andern beziehungsweise parallel geht, d. h. zu jeder Krystallebene ist nothwendig eine ihr parallellaufende vorhanden.

Dieser Satz ist etwas scharf ausgesprochen. Denn es gibt allerdings einige wenige Krystalle, die *nicht parallelflächig* (geneigtflächig) sind. Doch sind diese Ausnahmen blos scheinbar, da alle geneigtflächigen nicht nur von parallelflächigen abgeleitet werden müssen, sondern auch in denselben ihr Verständniss finden.

§. 3.

Krystallraum nennen wir den von zwei parallelen Krystallflächen begränzten Raum, der nach zwei Richtungen unbegränzt, nach einer begränzt ist.

Wenn wir von Linien und Flächen schlechthin reden, so denken wir uns diese unbegränzt, nach allen Seiten ins Unendliche ausgedehnt. Daher muss auch der Krystallraum, zwischen zwei unter sich parallelen unbegränzten Ebenen, ebenfalls unendlich sein. Die dritte Dimension, welche von der einen Gränzebene zur andern geht, ist durch die Gränzebenen selbst begränzt. Der allgemeine Raum unterscheidet sich daher vom Krystallraume nur dadurch, dass jener nach drei Dimensionen unbegränzt, dieser aber nur noch nach zweien, und nach der dritten schon begränzt erscheint. Ein Krystallraum ist veranschaulicht, wenn wir uns irgend eine Platte denken, deren Umrisse unbestimmt bleiben, oder wenn wir zwei Kartenblätter nehmen, und diese parallel mit sich bewegen. Der Raum, welcher in jedem Momente der Zeit zwischen den Blättern liegt, heifst Krystallraum.

§. 4.

Bei allen krystallographischen Betrachtungen wird die dritte endliche (begränzte) Dimension des Krystallraums beliebig veränderlich gedacht.

Es ist für den Anfänger, nicht selten auch noch für den Geübteren, eine der gröfsten Schwierigkeiten, dafs der Krystallraum (die oben gedachte Platte) keine bestimmte Dicke hat, sondern bei unseren Betrachtungen gleichgültig bald dicker bald dünner gedacht wird, d. h. seine beiden Gränzebenen rücken näher zusammen oder entfernen sich von einander. Dennoch behält der Krystallraum, mag er zur verschwindenden Papierdünne zusammen schrumpfen oder sich zu einer dicken Tafel ausdehnen, stets die dem Krystalle wesentlichen Eigenschaften unveränderlich bei.

Zusatz. Es ist bekanntlich bei allen Krystallen durchaus gleichgültig, ob die veränderlichen Krystallräume derselben sich mehr oder weniger ausdehnen, die Richtung und Winkelgröfse der Kanten bleibt dennoch ungestört, was das Wesentlichste ist, wie wir später einsehen lernen.

§. 5.

Krystallraum und Blätterbruch sind nach ihren wesentlichsten Bestimmungen identisch.

Der Blätterbruch soll die Eigenschaft der Mineralien bezeichnen, nach bestimmten Flächenrichtungen mittelst eines Stofses dergestalt spiegelflächig zu springen, dafs diese das Mineral theilenden Spiegelflächen möglicher Weise durch jeden beliebigen materiellen Punkt des Minerals geführt werden könnten. Oder, um ein Beispiel zu wählen, nimmt man eine Glimmertafel, so kann man diese parallel ihrem Blätterbruch in eine unendliche Menge dünner Tafeln zerlegen, und jede dieser Tafeln wieder eben so unendlich oft; kurz es ist kein Punkt in der Tafel denkbar, durch welchen nicht eine Blätterbruchfläche geführt werden könnte. Denken wir uns statt der Glimmerplatte den Krystallraum, so hat dieser dieselbe Eigenschaft, denn wir können seine Gränzflächen durch jeden seiner räumlichen Punkte legen, ohne dadurch einen andern Krystallraum zu bekommen.

§. 6.

Der Krystall ist (mechanisch gedacht) ein Complex von sich durchdringenden Krystallräumen (Blätterbrüchen).

Es ist eine täglich zu beobachtende Thatsache, dafs der von zwei parallelen Krystallflächen eingeschlossene Krystallraum niemals eine absolute Gröfse hat, sondern dieselben parallelen Krystallflächen nähern sich in dem einen Individuum, wenn sie sich im andern entfernen. In den Krystallflächen ist eine solche Beweglichkeit, dafs alle, selbst die einfachsten Krystallformen, den unmefsbarsten

Verziehungen unterworfen sind. Daher mufs man auch alle Formen nicht in ihrer ideellen Starrheit, sondern in ihrer natürlichen Beweglichkeit auffassen, welche durch den Begriff Krystallraum nach allen Möglichkeiten gegeben ist. Gerade in der Verschobenheit der einzelnen Theile, die ganz zum Gesetz geworden, liegt der Begriff des Krystalls versteckt, der alsdann in den Richtungen (Zonen, Axen) zur Klarheit kommt, aber nicht als wenn die Flächen über den Richtungen ständen, sondern die Richtungen sind das Bestimmende der Flächen, nur wird die unbefangene Anschauung leichter von den Flächen auf die Richtungen, als umgekehrt, geleitet. Diese Beweglichkeit der Flächen ist dann auch der Grund, dafs der Krystall in jedem Punkte derselbe sein, in jedem dieselben Eigenschaften zeigen mufs. Denn zerschlagen wir ein Stück Kalkspath, was bekanntlich aus drei Blätterbrüchen (Krystallräumen) besteht, die sich durchdrungen haben, so werden in jedem Stückchen dieselben drei Blätterbrüche wieder zum Vorschein kommen, ja man kann sich selbst keinen Theil des Kalkspaths so klein denken, dafs er nicht dieselben drei Blätterbrüche (Krystallräume) mehr haben sollte, zum deutlichen Beweise, dafs sich in jedem Punkte jene drei Krystallräume durchdringen und schneiden.

§. 7.

Um die Eigenschaften eines Krystalls zu erforschen, denken wir uns seine einzelnen Krystallräume unendlich dünn, d. h. zu einer mathematischen Fläche (Reduktionsebene) zusammen schwinden.

Es ist eine viel gehörte Meinung, dafs die mathematische Formenlehre von der krystallographischen nicht verschieden sei. Doch betrachtet die Mathematik ihre Figuren nur als starre (todte), die Krystallographie als bewegliche (lebendige) Formen. Die Krystallographie dürfte man demnach die Lehre von den lebendigen Formen nennen.

Um diese Lebendigkeit tiefer zu erfassen, eliminiren wir einstweilen die Beweglichkeit der Krystallräume dadurch, dafs wir uns unter ihnen mathematische Flächen vorstellen, was offenbar zu thun erlaubt ist, da die mathematische Fläche die eine Gränze, wenn die unendliche Ausdehnung (wodurch der Krystallraum dem absoluten Raume sich wieder nähert) die andere Gränze der variabeln Dimension bezeichnet. Daher zerfallen alle unsere Betrachtungen stets in diese zwei Theile, dafs wir erstlich uns die Krystallräume zu mathematischen Flächen reduciren, um den Reichthum der Verhältnisse in der Einfachheit leichter übersehen zu lernen; zweitens aber sogleich wieder die mathematischen Flächen zu den naturgemäfsen Krystallräumen auseinander treten lassen, wobei dann das wahrhafte Krystallbild trotz seiner Fülle von Beziehungen sich dennoch höchst einfach entwickelt.

Zusatz. Die Reduktionsebene ist von der mathematischen nicht verschieden, nur dafs wir die erste uns etwas beweglicher denken mögen. Wir hätten auch das einfache Wort Ebene beibehalten können, wenn wir nicht durch den Ausdruck Reduktionsebene immer an den Krystallraum erinnert würden. Uebrigens sind die Reduktionsebenen doch von mathematischen Ebenen verschieden. Denn zwei mathematische Ebenen können mit einander parallel gehen, zwei Reduktionsebenen nie, denn sie schlöfsen ja dann nur *einen* Krystallraum ein, gehörten also nur *einem* Krystallraume an, da sie doch als Reduktionsebenen nothwendig zweien angehören müssen. (cf. §. 11.)

§. 8.

Die Reduktionsebene ist durch zwei gerade sich schneidende Linien bestimmt.

Da die Ebene in allen ihren Theilen gleiche Beschaffenheit zeigt, so mufs sie auch bestimmt sein, wenn irgend einer ihrer Theile bestimmt ist. Denken wir uns daher

irgend einen beliebigen Theil, z. B. irgend ein Dreieck *abc*, davon bestimmt, so wird mit der Bestimmung der Lage dieses Dreiecks auch die Lage der Ebene bestimmt sein müssen. Das Dreieck, als die erste geschlossene Figur der Ebene, ist aber schon durch 2 Linien *ab* und *ac* bestimmt, daher mufs auch die ganze grofse Ebene durch diese zwei Linien bestimmt sein. Es ist dieses der gewöhnliche stereometrische Beweis für die Bestimmung einer Ebene.

§. 9.

Der Krystallraum ist durch 2 Linien, die sich in ihrer Bewegung (d. h. parallel mit sich fortbewegt) schneiden, bestimmt.

Da die mathematische Ebene als ein unendlich dünner Krystallraum gedacht werden kann, so können wir uns eine der Linien *ab* in der einen, die andere *ac* in der andern Gränzebene des Krystallraumes denken. Mögen wir nun die Gränzebenen mehr oder weniger von einander entfernen, so wird nicht nur der Krystallraum derselbe bleiben (da seine Dicke gleichgültig ist), sondern dieselben Linien *ab* und *ac* werden ebenfalls seine Lage bestimmen. Wir sehen aber, dafs beim Zusammenfallen der Gränzebenen sich beide Linien schneiden müssen. Zu gleicher Zeit ist auch klar, dafs zwei solcher Linien *ab* und *ac*, die sich in der Bewegung schneiden, auch nur einen einzigen Krystallraum bestimmen können, denn die unmittelbare Anschauung beweist, dafs bei der Bewegung der Gränzflächen auch zugleich die Bestimmungslinien *ab* und *ac* sich parallel unter sich fortbewegen. Sobald nun aber die Gränzebenen aus ihrer parallelen Bewegung zusammenstofsen, müssen auch die Linien ihre parallele Bewegung mit dem gegenseitigen Durchschnitt endigen. Sollten demnach zwei sich in der Bewegung schneidende Linien mehrere Krystallräume bestimmen können, so müfsten 2 sich

schneidende Linien eben so viel Ebenen (Reduktionsebenen) bestimmen.

§. 10.

Der Krystallraum oder vielmehr dessen Reduktionsebene wird in der Ebene des Papieres durch eine gerade Linie dargestellt (projicirt), wenn die Ebene des Papieres nicht selbst dem Krystallraume parallel geht.

Es ist ein Verdienst des Herrn Prof. F. C. Neumann in Königsberg, zuerst in seinem gelehrten Werke (Beiträge zur Krystallonomie, Berlin und Posen 1823.) die grofse Wichtigkeit einer bildlichen Darstellung durch die *graphische Methode* auseinander gesetzt zu haben. Da wir glauben, dafs eine gründliche Einsicht in sämmtliche Krystallverhältnisse den Meisten ohne eine ähnliche Darstellung gar nicht möglich ist, so wollen wir gleich bei unseren ersten Betrachtungen fortwährend auf eine solche Darstellung Rücksicht nehmen. Wir geben dabei der schon von Neumann angedeuteten Linearmethode vor der Punktirmethode den Vorzug.

Zu dem Ende denken wir uns eine beliebige Ebene π (*Projektionsebene* oder *Sektionsebene*), gewöhnlich die Fläche des Papieres, und lassen durch diese sämmtliche Krystallräume, welche vorher nothwendiger Weise auf ihre mathematische Fläche reducirt sein müssen, schneiden. Haben wir also nur einen Krystallraum zu projiciren, so entspricht diesem nur eine einzige mathematische Ebene a, diese a schneidet die Projektionsebene π nothwendig unter einer geraden Linie $a...a$ (Tab. II. Fig. 6) (*Sektionslinie* oder *Flächenlinie* genannt). Wir mögen die Ebene a drehen wie wir wollen, sie wird immer die Projektionsebene π in einer Linie schneiden müssen, ausgenommen in dem einzigen Falle, wenn die a der π parallel geht, alsdann wird a die π nicht schneiden. Wenn aber π der a parallel geht, dann ist der Raum zwischen π und a ein Krystallraum, also derselbe Krystallraum, den wir proji-

ciren wollen, demnach stellt hier die Projektionsebene π die Projektionsebene a selbst dar *).

Kapitel II.

Betrachtung zweier Krystallräume.

§. 11.

Zwei zu einer Ebene reducirte Krystallräume (Reduktionsebenen) schneiden sich stets unter einer geraden Linie.

Von vorn herein müssen wir immer erwägen, dafs alle unsere Krystallräume und Ebenen unbegränzt gedacht werden. Schnitten sich nun die Reduktionsebenen zweier Krystallräume nicht, so gingen sie parallel. Gingen sie aber parallel, so könnten sie in ihrer parallelen Bewegung möglicher Weise nur einen Krystallraum einschliefsen, daher nicht die Reduktionsebenen zweier Krystalle sein. Ist daher von zwei Krystallräumen oder deren Reduktionsebenen die Rede, so ist auch ihr lineärer Durchschnitt ein nothwendiger.

§. 12.

Die Reduktionsebenen zweier Krystallräume sind durch zwei Sektionslinien ($a...a$, $b...b$, Tab. II. Fig. 6 und 7*), die sich beliebig schneiden, folglich auch parallel gehen können, projicirt, sobald die Projektionsebene eine dritte hinzutretende Ebene ist.*

Wir haben (§. 10.) gesehen, dafs jede Reduktionsebene a die Projektionsebene π schneiden müsse, sobald a und π nicht parallel gehen. Die Reduktionsebene a (Tab. II. Fig. 6 und 7) mufs demnach durch eine Linie $a...a$, und

---

*) Dem Anfänger rathen wir, einige Kartenblättchen oder andere Täfelchen, welche die in Rede stehenden Ebenen darstellen, zur Hand zu nehmen. Er wird sich dadurch das Gesagte sehr leicht versinnlichen.

die Reduktionsebene *b* durch eine Linie *b...b* dargestellt werden. Der Durchschnittspunkt *o* der beiden Sektionslinien *a* und *b* heifst *Zonenpunkt*; die Durchschnittslinie beider Reduktionsebenen, welche die Projektionsebene in *o* trifft, *Zonenaxe*. Wir können aber nun weiter die beiden sich in der Zonenaxe schneidenden Reduktionsebenen *a* und *b* gegen die Projektionsebene *π* so lange drehen, dafs die Zonenaxe mit der Projektionsebene parallel geht; alsdann werden sich die Sektionslinien *a...a* u. *b...b* nicht mit einander schneiden, sondern unter sich parallel gehen; der Zonenpunkt *o* der Zonenaxe liegt dann im Unendlichen, d. h. er trifft die Projektionsebene nicht. Zugleich geht aber auch die Zonenaxe den unter sich parallel laufenden Sektionslinien *a...a* und *b...b* parallel, weil sie die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der beiden Reduktionsebenen *a* und *b* ist. Wir ersehen daher aus der Richtung der Sektionslinien die gleiche Richtung der Zonenaxe.

§. 13.

Die Reduktionsebenen zweier Krystallräume sind durch eine einzige Linie dargestellt, wenn eine der Reduktionsebenen der Projektionsebene parallel liegt.

Dieser Satz folgt aus §. 10 unmittelbar; denn wenn die Projektionsebene einer Reduktionsebene parallel geht, so kann ja nur noch die zweite Reduktionsebene die Projektionsebene schneiden.

Zusatz. Der Anfänger wird sich diesen Satz recht klar machen, wenn er zwei sich schneidende Kartenblätter *a* und *b* zur Hand nimmt, gegen diese eine 3te beliebig bewegt, und alle 3 sich unendlich denkt. Die *π* wird im Allgemeinen a und b unter 2 sich kreuzenden Linien schneiden, die Sektionslinien werden aber bald einen gröfsern, bald einen kleinern Winkel einschliefsen, je nachdem man *π* gegen *a* und *b* dreht. Bei der Darstellung, wie wir bald sehen werden, kümmert uns die Gröfse des Winkels

gar nicht, weil wir nur zu sehen brauchen, *dafs* die Linien der Karten *a* und *b* sich kreuzen, und nicht *wie* sie sich kreuzen. Der gröfste Winkel, welchen die Sektionslinien auf der Karte *π* einschliefsen können, kommt dem Neigungswinkel der Karten *a* und *b* gleich. Von diesem Maximum wird die Gröfse des Winkels immer kleiner und kleiner, bis zuletzt die Sektionslinien parallel mit einander laufen. Diese Parallelen werden nun wieder sich nähern oder entfernen, wenn ich *π* z. B. auf der Karte *a* der Durchschnittslinie der Karten *a* und *b* parallel drehe. Drehe ich *π* dem scharfen Neigungswinkel von *a* und *b* zu, so werden die Parallelen sich immer mehr nähern, und in dem Augenblicke zusammenfallen, wo *π* mit *a* zusammenfällt. Alsdann ist nur eine Sektionslinie zu sehen, weil *jetzt die* Karte *a* zur Projektionsebene geworden. Drehe ich *π* aber dem stumpfen Winkel zu, so werden sich die Parallelen immer mehr entfernen, bis *π* parallel *b* wird, folglich von den zwei Parallelen nur die eine durch *a* und *π* gebildet bleiben kann, so dafs dieser Fall für die Projektion dieselbe Erscheinung gibt, als wenn *π* mit *b* zusammenfiele. Hiermit sind alle denkbaren Fälle erschöpft *).

§. 14.

Durchdringen sich zwei Krystallräume, so bilden ihre vier Gränzflächen eine vierseitige Säule, und vier unter sich parallele Kanten (Eine Zone).

Um diesen Satz zu begreifen, dürfen wir nur auf die Projektionsfigur Tab. II. Fig. 7 zurücksehen. Wir lassen

*) Nur der einzige Fall bleibt noch denkbar, dafs *π* in der gemeinsamen Kante von *a* und *b* selbst läge, dann würden aber die beiden Ebenen *a* und *b* die *π* nur in einer einzigen Linie schneiden können, und möchten noch so viel Ebenen in dieser Kante liegen, so würden sie dennoch durch Sektionslinien nicht sichtbar werden. Daher ist es bei dem Projiciren eine Hauptbedingung, *dass die den zu projicirenden Ebenen gemeinsame Kante ausserhalb der Projektionsebene liege.*

im Gedanken die Reduktionsebenen zu Krystallräumen werden, alsdann werden sich die 2 Linien der Projektionsebene als vier Linien darstellen (Tab. II. Fig. 8 nehmlich 2 Linien a...a und 2 Linien b...b), die sich in 4 Punkten o schneiden, zwischen welchen die 4 Seiten o...o liegen. Die 4 Durchschnittslinien (Kanten) dieser 4 Seiten sind unter sich parallel, denn sie sind durch parallele Bewegung der Flächen entstanden, weil es ein allgemeines Axiom ist, *daſs alle neu entstehenden Durchschnittslinien, welche durch parallele Bewegung von solchen Ebenen, die sich nur in einer einzigen Kante schnitten, entstehen, unter sich und der ursprünglichen Kante (Zonenaxe) parallel stehen.* Daher gehen auch unsere 4 Kanten der ursprünglichen Zonenaxe parallel, durch die Bewegung der Flächen konnte keine neue Richtung eingesetzt werden. Wir sagen aber, Flächen liegen in *Einer Zone,* sobald dieselben solche Kanten bilden, die unter sich parallel gehen. Ueberall, wo parallele Kanten sind, sind die Flächen, welche in diesen Kanten liegen, in *Einer Zone* gelegen.

Obschon das Wort Zone seit 1804 durch Hrn. Professor Weiſs in die Wissenschaft eingeführt (cf. 2. Band der Uebersetzung von Hauy, Leipzig 1804, Anhang zum Artikel Feldspath), und aus dem Begriffe der Zone alle Krystallverhältnisse (Schriften der Berliner Akademie seit dem Jahre 1814) auf das gründlichste entwickelt wurden, so ist dennoch der Ausdruck wenig verbreitet, weil Viele an der vermeintlichen Schwierigkeit des Begriffs Anstoſs nahmen. Da aber Zone nichts weiter bedeutet als Parallelität von Kanten, und alle Flächen in *einer* Zone liegen, welche unter sich parallele Kanten bilden, so kann nur die Einfachheit des Begriffes an jener Schwierigkeit Schuld sein.

Der Anfänger muſs sich hüten, nicht alle Säulen mit 4 parallelen Kanten 4seitig zu nennen, sondern es gehört wesentlich zum Begriffe der 4seitigen Säule, daſs sie durch 2 Krystallräume gebildet sei.

§. 15.

Die verschiedenen Arten der vierseitigen Säule sind durch einen Winkel mathematisch bestimmt.

Bei den Krystallräumen war noch keine weitere Bestimmung möglich, weil alle Krystallräume absolut identisch sind. Bei den Säulen tritt die erste Differenz ein. Es gibt verschiedene Säulen, je nachdem der Winkel α (Tab. II. Fig. 7 u. 8) ein rechter oder schiefer ist (*rechtwinklige* und *geschobene vierseitige Säule*). Dafs aber nur ein einziger Winkel α nöthig sei, folgt aus der wechselseitigen Parallelität der vier Seiten, wefshalb $\alpha + \beta = 2\,R$ (R = Rechterwinkel), α und β treten jeder zwei Mal auf, nach der allgemeinen Regel, dafs alle diejenigen Winkel gleich sein müssen, welche von den Gränzebenen gleicher Krystallräume gebildet werden.

Zusatz. Bei weniger Uebung werden wir sämmtliche Eigenschaften auch aus der einfachen Projektionsfigur (Tab. II. Fig. 7) ersehen lernen. Wir sehen z. B. daraus, dafs die Säule nur eine Zone habe, weil nur ein Zonenpunkt vorhanden ist, aber zweierlei Winkel α und β, die sich beide zu zwei Rechten ergänzen, weil sie Nebenwinkel sind. In Fig. 6 (*a* und *b*) liegen diese Eigenschaften etwas versteckter. Doch wenn wir bedenken, dafs die Zonenaxe der Projektionsebene parallel geht, so wird das Auffinden der erwähnten Eigenschaften auch keine Schwierigkeit machen.

Kapitel III.

Betrachtung dreier Krystallräume.

§. 16.

Die Reduktionsflächen dreier Krystallräume können sich auf zwei Arten schneiden:

1) *in einer Zone,*
2) *in einem Punkte*

Der Satz wird von selbst klar, wenn wir 3 Kartenblätter zur Hand nehmen. Zwei derselben schneiden sich stets unter einer Zone (§. 11). Fügen wir dazu eine dritte, so kann diese entweder durch die gemeinsame Zone gelegt werden, oder sie mufs beide erstern Blätter schneiden.

1) Die drei Reduktionsebenen schneiden sich in einer Zone.

§. 17.

Solche drei Reduktionsebenen sind durch 3 Linien, welche sich entweder in einem Punkte schneiden oder mit einander parallel gehen, projicirt, so lange die Projektionsebene eine 4te hinzutretende Ebene ist (Tab. II. Fig. 6. und Fig. 9).

Da die drei Ebenen nur in einer Zone liegen sollen, so darf auf der Projektionsebene auch nur *ein* Zonenpunkt *o* hervortreten, denn träten 2 auf, so müfste ja auch jedem Zonenpunkte eine Zonenaxe angehören. Schneiden sich daher die Sektionslinien *abc* in der Projektionsebene, so schneiden sie sich nothwendig in einem Punkte; schneiden sie sich nicht, so müssen sie alle unter einander parallel gehen, wie in Fig. 6. Tab. II., wo die Richtung der Linien *a...a*, *b...b*, *c...c* die Richtung der Zonenaxe anzeigt (§. 12.).

§. 18.

Ist von den drei Reduktionsebenen eine zur Projektionsebene geworden, so stellen zwei Parallelen (*a* und *b* Fig. 6. Tab. II.) *das Projektionsbild dar.*

Da die dritte Reduktionsebene zur Projektionsfläche geworden ist, so versteht sich von selbst, dafs die beiden andern Flächen sich gegen ihre dritte grade so verhalten müssen, wie in §. 12 durch Fig. 6 (Linie *a* und *b*) gelehrt wurde. Nur mufs der Anfänger durch die Beweglichkeit der Flächen nicht irre geleitet werden. Um nämlich Durchschnitte zu bekommen mufs die Projektionsebene parallel

mit sich fortbewegt werden. Denn blieb sie in der Zonenaxe liegen, so würde der gemeinschaftliche Durchschnitt *a* und *b* in der Projektionsebene liegen, was nach §. 13 *Zusatz* verboten ist.

§. 19.

Lassen wir die drei Reduktionsebenen (Tab. II. Fig. 9) *sich zu Krystallräumen entfalten, so bekommen wir eine 6seitige Säule* (Tab. II. Fig. 10) *mit einer sechskantigen Zone.*

Um diefs einzusehen, dürfen wir nur zur 4seitigen Säule zurückkehren, die auch in Fig. 10 durch *a*...*a* und *b*...*b* geschrieben steht (siehe das Parallelogramm $\alpha o \alpha o$). Der dritte hinzukommende Krystallraum *c* nahm zwei Kanten dieser vierseitigen Säule weg, wodurch die sechsseitige (*oooooo*) entstanden ist. Wenn eine Kante durch eine hinzutretende Fläche ersetzt wird, so sagt man, die Kante sei abgestumpft. Die vierseitige Säule ist also durch Abstumpfung zweier gegenüberliegenden Kanten zur sechsseitigen geworden. Wenn daher eine Fläche *c* die von zwei Flächen *a b* gebildete Kante abstumpft, so müssen die beiden neuen Kanten, welche *c* mit *a* und *b* macht (also Kante *c*/*a* und Kante *c*/*b*), unter sich parallel gehen. Denn es ist ja nur eine Zone in der ganzen Säule vorhanden. Dafs man die sechsseitige Säule auch als eine Durchdringung von 3 vierseitigen ($\beta o \beta o$, $\alpha o \alpha o$ und $\gamma o \gamma o$) ansehen kann, und dafs eben so ein jeder Krystallraum die vierseitige Säule der übrigen beiden Krystallräume abstumpft, solche Verhältnisse werden nicht nur aus dieser Figur, sondern schon aus den Figuren 6 und 9 von selbst klar. Denn vergleichen wir unsere Fig. 10 mit Fig. 9, so entsprechen sich in beiden die Säulenwinkel α, β und γ; wir sehen, dafs in Fig. 9 die Fläche *c* den scharfen Winkel α (welchen *a* und *b* machen), oder die Fläche *b* den Winkel β (welchen *a* und *c* machen) etc. abstumpfen. So dafs also

keine Eigenschaft der Säule gedacht werden kann, die nicht aus der Projektion zu ersehen wäre.

§. 20.

Die verschiedenen Arten der sechsseitigen Säule sind durch zwei Winkel mathematisch bestimmt.

Aus Tab. II. Fig. 10 ersehen wir, dafs das Sechseck dreierlei Winkel haben kann, da die sich gegenüberliegenden Winkel (Winkel, die von den Gränzflächen gleicher Krystallräume gebildet werden,) wegen der Parallelbewegung gleich sein müssen. Die Winkel des Sechsecks betragen aber ganz allgemein (2. 6−4) $R = 8\,R$, daher die 3 zu bestimmenden $= 4\,R$; sind von den dreien zwei bekannt, so wird der dritte durch Subtraktion gefunden.

Zusatz 1. Wenn der Krystallraum durch keinen, die vierseitige Säule durch einen, die sechsseitige durch zwei Winkel bestimmt wird, so erwarten wir schon im Voraus, dafs die nächste Figur durch 3 Winkel bestimmt sein mufs.

Zusatz 2. Die Säule (das Prisma) ist ein Raum, der nach einer Dimension hin noch unendlich ist, und in sofern schliefst sie sich systematisch an die Begriffe Raum und Krystallraum an. *Raum* nach *drei, Krystallraum* nach *zwei Dimensionen, Säule* nach *einer,* und das nun folgende *Hexaid* nach *keiner Dimension* unendlich.

2) Die drei Reduktionsebenen schneiden sich in einem Punkte.

§. 21.

Solche drei Reduktionsebenen sind durch ein Dreieck (Tab. II. Fig. 11) *oder durch zwei Parallelen von einer dritten Linie geschnitten* (Tab. II. Fig. 12) *dargestellt, so lange die Projektionsebene eine vierte hinzutretende Ebene ist.*

Sobald 3 Reduktionsebenen *a, b* und *c* nur einen Punkt gemein haben sollen, so müssen sie sich in drei Kanten (*ab, ac* und *bc*) schneiden, ein Schnitt unter 2 Kanten und mit gemeinsamem Punkte ist nicht möglich. Daher

bekommen wir eine dreiseitige körperliche Ecke, deren Flächen und Kanten von dem gemeinsamen Punkte (den wir x nennen wollen) ausstrahlen. Kommt nun eine 4te Projektionsebene π hinzu, so mufs diese jede von jenen drei Flächen $a\,b\,c$ respective unter den Sektionslinien $a...a$ $b...b$ und $c...c$ (Tab. II. Fig. 11 und Fig 12) schneiden, die drei Kanten (Zonenaxen) strahlen von dem gemeinsamen, aufserhalb der Projektionsebene beliebig wo gedachten Punkte nach den Zonenpunkten α, β und γ. Drehen wir nun die Projektionsebene π in alle nur mögliche Lagen gegen die drei Ebenen $a\,b\,c$, so werden im Allgemeinen ungleichseitige Dreiecke auf der Projektionsebene entstehen, im besondern Falle auch gleichschenklige und gleichseitige, sie alle stellen aber die Projektion derselben Ecke dar, da man aus den noch so verzogenen Dreiecken dennoch die Richtung der Kanten und die Lage der Kantenwinkel ersieht. Wird aber die Projektionsebene π endlich so weit gedreht, dafs sie mit einer Richtung z. B. der Richtung $x\alpha$ parallel läuft, so werden die beiden Sektionslinien $a..a$ und $b...b$ parallel laufen müssen, und von der dritten geschnitten werden (Fig. 12). Der Zonenpunkt α liegt, sagt man, dann im Unendlichen. Im Grunde folgt diese Projektionsfigur unmittelbar aus Fig. 6 und 7 des §. 12. Denn denken wir uns daselbst zu den beiden Ebenen noch die dritte c hinzu, so mufs die Sektionslinie von c beide Sektionslinien $a...a$ und $b...b$ schneiden.

Zusatz. Auch hier müssen wir zur Hauptbedingung machen, dafs der gemeinsame Punkt stets ausserhalb der Projektionsebene liege, weil sonst alle Figuren nur einen einzigen Zonenpunkt haben würden (vgl. §. 13 *Zusatz*).

§. 22.

Ist von den drei Reduktionsebenen eine zur Projektionsebene geworden, so stellt Fig. 7 Tab. II. *das Projektionsbild vor.*

Denn denken wir in Fig. 7 des §. 12 die Projektions-

ebene π als Reduktionsebene des dritten Krystallraumes, so ist dort ganz derselbe Fall wie hier. Die beiden Ebenen a und b gehen durch den gemeinsamen Punkt x ausserhalb der Projektionsebene, die dritte Ebene c geht durch denselben Punkt, aber der Projektionsebene parallel, daher kann von ihr keine Sektionslinie sichtbar sein. Man sagt in diesem Falle, die Ebenen sind auf c projicirt, eigentlich sollte man sagen, die Ebenen sind auf eine Fläche π projicirt, die der c parallel geht.

§. 23.

Lassen wir unsere drei Reduktionsebenen sich zu Krystallräumen entfalten, so entsteht ein Hexaid (Parallelopiped) mit 6 Flächen und 3 Zonen.

Nehmen wir erst zwei Krystallräume a und b, so bilden diese nach §. 14 eine 4seitige Säule. Kommt endlich der dritte Krystallraum hinzu, so schliefst dieser die unendliche Richtung der Säule auf beiden Seiten, wir bekommen dadurch den ersten geschlossenen Körper mit 6 Seiten (Hexaid, ἕξ sechs, *id* die Allgemeinheit der Form bezeichnend). Der Körper kann nur drei Zonen haben, weil ja zwei Krystallräume eine 4seitige Säule bilden müssen, und unter 3 Krystallräumen *(a b c)* nur drei Combinationen *(ab, ac, bc)* zu je zwei Flächen möglich sind. Der Anfänger kann sich an jedem Buche, Würfel, Zimmer etc. die Sache klar machen, da dieselben besondere Hexaide vorstellen.

§. 24.

Die Flächen des Hexaides sind im Allgemeinen dreierlei Parallelogramme, von denen jedem Krystallraume eines zugehört.

Da jede Gränzfläche eines Krystallraumes *(a)* sich mit den 4 Gränzflächen der beiden andern Krystallräume *(b* und *c)* schneiden mufs, so kann man die Gränzflächen von a als die Projektionsebenen der Krystallräume b und c

ansehen, welche nach §. 14 stets unter einem Parallelogramm geschnitten werden. Was aber für die Gränzflächen des einen Krystallraumes gilt, gilt auch für die des andern. Daher mufs jeder Krystallraum von zwei congruenten ihm angehörigen Parallelogrammen geschlossen sein. Dafs die Seiten jedes Parallelogrammes zwei der drei Zonen bezeichnen, leuchtet ein.

§. 25.

Die verschiedenen Arten der Hexaide sind durch drei Kantenwinkel mathematisch bestimmt.

Aus den 3 Zonenpunkten Fig. 11. Tab. II. ersehen wir, dafs man das Hexaid als einen Körper mit 3 vierseitigen Säulen betrachten kann und mufs. Nach §. 15 ist aber jede vierseitige Säule durch einen Winkel bestimmt, daher sind die aller drei durch drei Winkel bestimmt (cf. *Zusatz* 1. §. 20). Das Hexaid hat zwar 3. 4 = 12 Kanten, allein darunter müssen 6 den übrigen 6 als gegenüberstehende Winkel gleich seyn. Die sechs zertheilen sich wieder in 2 mal 3, von denen die einen die Complemente der andern bilden.

Zusatz. Da das Hexaid der erste geschlossene Körper ist, so treten hier ausser den Kantenwinkeln noch ebene Winkel (Winkel auf den Ebenen von den Kanten eingeschlossen) auf. Die ebenen Winkel sind in der Krystallographie nur von sehr untergeordnetem Interesse, und folgen stets durch mathematische Formeln aus den Kanten, wie wir das im rechnenden Theile lernen werden. Da wir 2. 3 Parallelogramme haben, so liegen in jedem der drei unter sich verschiedenen Parallelogramme zweierlei Winkel, die sich zu 2 Rechten ergänzen, so dafs ebenfalls, um alle ebenen Winkel kennen zu lernen, auch nur 3 zu bestimmen sind. Uebrigens verhalten sich die drei *Ebenen* — zu den drei *Kanten-Winkeln* stereometrisch so, dafs die einen aus den andern abgeleitet werden können.

§. 26.

Das Hexaid hat 4 verschiedene dreikantige Ecken, sind aber die Elemente einer Ecke bestimmt, so folgen daraus sämmtliche Eigenschaften des Hexaides.

Betrachten wir irgend eine Krystallfläche des Hexaides, so liegen daran vier 3kantige Ecken, die Parallele der betrachteten Krystallfläche hat ebenfalls 4, die aber den vier ersten respective congruent sind, weil sämmtliche Theile der erstern 4 Ecken sämmtlichen Theilen der letztern parallel liegen. Von den 4 Ecken ist aber keine der andern congruent, zwar sind in allen dieselben 3 Kanten zu finden, doch ist unter den 3 ebenen Winkeln immer ein verschiedener vorhanden. Jede Ecke bietet aber alle zur Bestimmung nothwendigen Elemente dar.

Zusatz. Wir glauben diesen Satz durch keine Figur erläutern zu müssen. Dem Schüler rathen wir, sich aus einer Rübe, oder aus Seife, Kreide etc. ein Hexaid zu schneiden. Ein Hexaid bekommt er aber immer, wenn er drei beliebige Schnitte macht, und diesen drei dann durch irgend einen Punkt drei andere Schnitte parallel führt.

Kapitel IV.

Betrachtung von vier Krystallräumen.

§. 27.

Vier Reduktionsebenen können sich auf drei Arten mit einander schneiden.

1) *in einer Zone,*
2) *drei in einer Zone, und die vierte schneidet dieselben,*
3) *in einem Punkte.*

Dafs ausser diesen drei Fällen kein anderer Fall mehr möglich sei, macht man sich leicht mit vier Kartenblättern deutlich. Nimmt man eines aus der vierblättrigen Zone,

so bleiben drei Blätter über, und das herausgenommene schneidet die drei übrigen jedes in einer neuen Zone. Nimmt man 2 aus der vierblättrigen Zone, so bleibt letztere nur 2blättrig, legt man das dritte Blatt dagegen, so müssen sich, nach §. 16, die 3 in einem Punkte schneiden. Legt man endlich die 4te gegen die 3, so darf man dieselbe durch keine vorhandene Schnittlinie legen, weil wir sonst in den 2ten Fall gerathen, wir können die 4te also nur noch gegen alle drei schneiden lassen, und, da die Reduktionsebene stets beweglich gedacht wird, in den gemeinsamen Punkt der drei übrigen rücken.

1) Die vier Reduktionsebenen schneiden sich in einer Zone.

§. 28.

Solche vier Reduktionsebenen sind durch 4 Linien, welche sich entweder in einem Punkte schneiden oder mit einander parallel gehen, projicirt, so lange die Projektionsebene eine 5te hinzutretende Ebene ist.

Dieser Satz ist durchaus nur die Wiederholung von §. 12. und §. 17., denn was für 2 und 3 Ebenen galt, gilt offenbar auch für 4

Zusatz. Man kann dem gemäfs auch den Satz auf n Ebenen ausdehnen, welche durch n Linien projicirt werden, sobald die Projektionsebene eine $(n+1)$te hinzukommende Ebene ist.

§. 29.

Ist von den vier Reduktionsebenen eine zur Projektionsebene geworden, so stellt die Fig. 6. Tab. II. das Projektionsbild dar.

Auch dieser Satz ist nur eine Wiederholung des §. 13. und §. 18. Man mufs auch hier bedenken, dafs die Projektionsebene nicht in der allen vieren gemeinsamen Kante liegen bleiben darf, sondern wir müssen die Projektionsebene parallel mit sich herausrücken, wodurch dann die drei übrigen mit ihr zum Schnitte kommen.

Zusatz. Man kann auch diesen Satz auf *n* Ebenen ausdehnen. Sie sind durch *n* 1 Parallellinien projicirt, sobald eine der *n* Ebenen zur Projektionsebene gewählt ist.

§. 30.

Lassen wir die vier Reduktionsebenen sich zu Krystallräumen entfalten, so bekommen wir eine achtseitige Säule mit einer achtkantigen Zone.

Auch dieser Satz macht sich leicht klar. Man kann z. B. die achtseitige Säule als eine sechsseitige *(a, b, c)* ansehen, deren eines Paar von gegenüberstehenden Kanten durch den 4ten hinzu tretenden Krystallraum *(d)* abgestumpft wird. Oder man kann sie als eine Durchdringung (nach einer Zonenrichtung) von zwei 4seitigen *ab* und *cd* ansehen. Ueberhaupt kann man die vier Krystallräume zu sechs verschiedenen Säulen *(ab, ac, ad, bc, bd, cd)* combiniren. Die achtseitige Säule leitet uns zuerst auf den *Begriff der Zuschärfung.* Wenn man aus den sechs vorhandenen vierseitigen Säulen irgend eine herausgreift, so werden wir finden, daſs an die Stelle zweier sich gegenüberstehenden Kanten dieser Säule zwei Flächen getreten sind, diese *schärfen die Kanten der Säule zu.* (So schärfen z. B. §. 31. Fig. 13. Tab. II. *b* und *c* die Kante der verlängerten *a* und *d* zu.) An die Stelle des Säulenwinkels der vierseitigen Säule tritt dann ein anderer, der stets stumpfer ist aſs der zugeschärfte Winkel (der Winkel von *bc* ist stumpfer als der von *ad*, Fig. 13.). Auch die Zuschärfungsflächen schneiden die Kanten des zugeschärften Winkels dergestalt, daſs die neu entstehenden Kanten mit der alten Kante parallel gehen. *Abstumpfungen und Zuschärfungen der Säulenkanten setzen an der Säule keine neue Zone ein.*

§. 31.

Die verschiedenen Arten der achtseitigen Säule sind durch drei Winkel mathematisch bestimmt.

Was wir §. 20. von der sechsseitigen Säule sagten, gilt

auch von der achtseitigen. Die 8seitige Säule hat $(2.8-4)\ R = 12\ R$, daher die zu bestimmenden Winkel $= 6\ R$, sind davon 3 bekannt, so wird der 4te durch Subtraktion gefunden.

Zusatz. Man kann diesen Satz auch auf n Flächen ausdehnen: *die verschiedenen Arten der n seitigen Säule sind durch* $(\frac{1}{2}n-1)$ *Winkel mathematisch bestimmt.* Denn in allen Säulen müssen die sich gegenüber liegenden Winkel gleich bleiben, mögen auch noch so viel Krystallräume sich durchdringen. Gegenüberliegende Winkel sind aber solche, die von den Gränzflächen gleicher Krystallräume gebildet werden. In der Fig. 13. Tab. II. ist Winkel *ab* dem *ab*, *bc* dem *bc*, *cd* dem *cd* und *ad* dem *ad* gegenüberliegend, weil die Sektionslinien der Gränzflächen gleicher Krystallräume *a...a*, *b...b*, *c...c* und *d...d* die Schenkel derselben bilden. Da nun jede n seitige Säule $(2n-4)\ R$ hat, so sind die $\frac{1}{2}n$ unbekannten Winkel $= (n-2)\ R$, daher brauche ich nur $\frac{1}{2}n - 1$ Winkel zu kennen, woraus dann sich der letzte durch Subtraktion ergibt.

2) Drei der vier Reduktionsebenen schneiden sich in einer Zone, und die vierte schneidet dieselben.

§. 32.

Solche vier Reduktionsebenen sind durch vier Sektionslinien mit vier Zonenpunkten projicirt, so lange die Projektionsebene eine fünfte hinzukommende Ebene ist. (Tab. II. Fig. 14 u. 15.)

Wir haben §. 17. gesehen, dafs eine sechsseitige Säule *(abc)* durch drei Sektionslinien *(a...a, b...b, c...c)* dargestellt wird, welche sich in einem Punkte schneiden (Fig. 9) oder mit einander parallel gehen (Fig. 6.). Möchte nun auch der Krystallkörper noch so complicirt werden, diese drei in einer Zone liegenden Flächen können nie anders auf einer vierten Projektionsebene sich darstellen. Kömmt nun eine vierte *(d)* hinzu, die ebenfalls nicht Projektions-

ebene sein, und zugleich auch nicht in dieselbe Zone fallen soll, so mufs die *d* offenbar jede der drei andern, also auch die Sektionslinien derselben *(a, b, c)* schneiden. Fig. 14 kann noch mehrere besondere Formen annehmen, je nachdem man die Projektionsebene dreht. Die Sektionslinie *d...d* kann nämlich die andern drei noch so schneiden, dafs sie der *c...c* oder der *b...b* oder der *a...a* parallel geht, je nachdem die Projektionsebene den Zonenaxen von *cd*, *bd* oder *ad* parallel liegt. Bei Fig. 15 ist aber keine andere Form möglich.

§. 33.

Ist von den vier Reduktionsebenen eine zur Projektionsebene geworden, so stellen Fig. 9 und Fig. 12 Tab. II. die möglichen Projektionsfiguren dar.

Denn wäre *d* die Projektionsebene, so würde dieselbe von den drei übrigen in dem allen vieren gemeinsamen Punkte *(x)* geschnitten werden. Da doch aber die drei übrigen in einer Zone liegen, so kann diefs keine andere Gestalt als Fig. 9. werden. Wäre aber eine der drei andern *a*, *b* oder *c* Projektionsebene, so würden wir Fig. 12 erhalten. Denn es sei z. B. (Fig. 14 und 15) die Reduktionsebene *a* zur Projektionsfläche geworden, so würden die Reduktionsflächen *c* und *d* diese Projektionsebene unter zwei Linien treffen, die sich im Punkte *x* schnitten. Die dritte Reduktionsebene *b* würde aber noch auf der Projektionsebene mit *c* eine gemeinschaftliche Sektionslinie haben, was bei einer Projektion nie Statt finden darf (cf. §. 13 *Zusatz.*), folglich müssen wir die *b* parallel mit sich aus der gemeinsamen Sektionslinie zum gemeinsamen Punkte *cd* herausrücken, wodurch eine neue Sektionslinie entsteht, die aber der Ebene *c* parallel läuft, so dafs also 2 Parallelen, von einer dritten Linie geschnitten, entstanden (Fig. 12.) sind.

Zusatz. Um die Sache sich gehörig zu versinnlichen, wird der Anfänger nicht ohne Nutzen sich 4 Fäden auf-

stellen, die von dem gemeinsamen Punkte x (Fig. 16. Tab. II.) nach den vier Zonenpunkten (1, 2, 3, 4) ausstrahlen, wo in je zwei solchen Fäden eine der 4 Flächen liegt. Hier sehen wir dann deutlich, dafs, wenn $x\,14$ die Projektionsebene ist, die Ebenen $d\,1\,x$ und $c\,4\,x$ die Projektionsebene unter $x\,1$ und $x\,4$ schneiden, und dafs b ebenfalls in der Sektionslinie $x\,4$ liege; wir rücken sie daher parallel mit sich in den Punkt 3. Denken wir uns b weg, so bilden die Sektionslinien abd die Projektionsfigur eines Hexaides, dessen drei Zonenaxen von dem gemeinschaftlichen ausserhalb der Projektionsebene gelegenen x aus nach den Zonenpunkten 1, 3 und 4 strahlen.

§. 34.

Lassen wir unsere Reduktionsebenen sich zu Krystallräumen entfalten, so bekommen wir eine sechsseitige Säule mit einer Endfläche.

Man kann jede Projektionsfigur als eine aus Theilfiguren zusammengesetzte ansehen. In allen Projektionsbildern müssen aber die einzelnen Theilfiguren dieselben einfachen Körper darstellen, wie wir sie in den vorhergehenden Kapiteln entwickelt haben. Diese Betrachtung gibt uns defshalb eine sehr leichte Methode an die Hand, selbst unter den komplicirtesten Projektionsfiguren sich das richtige Bild von der wahrhaften Krystallform zu machen. Unser Körper mufs eine sechsseitige Säule haben, weil er einen 3flächigen Zonenpunkt hat. Er mufs aber ferner eine Fläche besitzen, welche jede der Säulenflächen unter einer besondern Kante schneidet, weil die Sektionslinie d jede der Sektionslinien a, b und c kreuzt. Daher mufs diese d das unendliche Ende der sechsseitigen Säule schliefsen, weil dadurch die Bedingungen der Projektion erfüllt sind. Jede sechsseitige Säule, sie mag noch so verzogen sein (wenn sie nur von 3 Krystallräumen gebildet ist), mit einer Endfläche entspricht den verlangten Bedingungen.

Der dreiflächige Zonenpunkt (4 Fig. 16. Tab. II.) ist (Fig. 17. Tab. II.) durch die 6seitige Säule *abcabc* dargestellt; der 2flächige Zonenpunkt 1 wird durch die 4seitige Säule *adad*; Punkt 2 durch die 4seitige *bdbd* und Punkt 3 durch die 4seitige *cdcd* dargestellt, so dafs die Endfläche *d* richtig in drei vierseitigen Säulen liegt.

Zusatz. Auch hier mag sich der Anfänger aus einem plastischen Material verschiedene sechsseitige Säulen mit Endflächen schneiden. Zunächst schneidet er sich eine beliebige sechsseitige Säule (mit 3 Krystallräumen), daran wird alsdann jeder beliebige Querschnitt die entsprechende Endfläche bilden müssen.

§. 35.

Unser Krystall ist ein vierzoniger (Vierzonenkörper) mit drei Parallelogrammen in der sechsseitigen Säule und einem Sechseck in der Endfläche.

Wir sehen, dafs z. B. die Reduktionsfläche *a* nur von den Reduktionsflächen *c* und *d*, deren Sektionslinien mit *a* sich in *x* treffen, geschnitten wird. Werden die Reduktionsflächen zu Krystallräumen, so können bekanntlich keine andern Richtungen entstehen, als diese beiden, daher mufs die Fläche *a* ein Parallelogramm sein. Dasselbe gilt auch von *b* und *c*. Die Reduktionsfläche *d* wird aber, wie sich aus ihren 3 Zonenpunkten ergibt, von 3 Reduktionsflächen geschnitten, daher mufs diese bei dem Auseinandertreten der Reduktionsflächen ein Sechseck geben.

Zusatz. Es ist bei sehr zusammengesetzten Krystallen nicht immer nothwendig, dafs jede Fläche zum Schnitte mit den übrigen komme, sondern manche Fläche schneidet sich oft nur mit ihren nächsten Nachbarflächen. In solchen Fällen können alsdann die Krystallflächen nur möglicher Weise die Form bekommen, wie wir hier lehren.

§. 36.

Die verschiedenen Arten der Vierzonenkörper sind durch vier Kantenwinkel mathematisch bestimmt.

Man kann den Vierzonenkörper als ein Hexaid ansehen, dessen eine Säule durch Abstumpfung ihrer Kante zur sechsseitigen geworden ist. Das Hexaid *acd* ist durch die 3 Kantenwinkel in den Zonenpunkten *ac*, *ad* und *cd* bestimmt (folglich dadurch auch die ebenen Winkel dieses Hexaides bekannt). Daher kennen wir von der neu entstandenen sechsseitigen Säule schon einen Winkel, kennen wir davon noch einen 2ten, so ist auch die sechsseitige Säule bekannt. Es bleibt mithin nur noch eine unbekannte vierseitige Säule über, welche von *bd* gebildet wird, diese wird aber trigonometrisch leicht gefunden, wenn wir die bekannten ebenen Winkel des Hexaides mit zu Hilfe nehmen.

Zusatz. Der Vierzonenkörper ist eben so gut durch 4 Flächenwinkel bestimmt, denn es ist ein allgemeiner Satz, daſs eine gleiche Menge von Kantenwinkeln für die Berechnung eben so zweckmäſsig ist, als eine gleiche Menge von ebenen Winkeln.

Ueber die weitere Beschaffenheit der ebenen Winkel des Vierzonenkörpers sich Rechenschaft geben zu wollen, würde ganz nutzlos seyn.

3) Die vier Reduktionsebenen schneiden sich in einem Punkte.

§. 37.

Solche vier Reduktionsebenen sind durch vier Sektionslinien mit sechs Zonenpunkten projicirt, so lange die Projektionsebene eine fünfte hinzukommende Ebene ist. (Tab. II. Fig. 18—20).

Bezeichnen wir die Zonenpunkte mit den Linien, welche sich in ihnen schneiden (wie wir dieſs gewöhnlich zu thun pflegten), so sehen wir in allen drei Figuren (Fig. 18—20) die sechs Punkte *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd* und *cd*,

daher müssen alle drei Figuren dem aufgestellten Satze genügen. Denn dafs die beiden parallelen Sektionslinien *c* und *d* in Fig. 19 ihren Zonenpunkt *cd*, sogar in Fig. 20 auch noch *a* und *b* ihren Zonenpunkt *ab*, im Unendlichen haben, sind wir schon geübt zu sehen, daher unterscheiden sich die drei Figuren nicht wesentlich von einander, nur ist jede folgende specieller, als die ihr vorhergehende. Dafs die Projektionsfiguren unsrer 4 Reduktionsebenen nothwendig Fig. 18—20 werden müssen, folgt aus den Projektionsbildern des Hexaides (Tab. II. Fig. 11 und 12). Lassen wir zu jenen drei Sektionslinien *a*, *b* und *c* der Fig. 11 eine 4te *d* treten, so würde diese durch einen schon vorhandenen Zonenpunkt gehen können (ein Fall, der jetzt ausgeschlossen sein soll, weil es einen Vierzonenkörper gäbe), oder durch keinen, d. h. sie mufs sämmtliche drei Sektionslinien schneiden, was uns Fig. 18 gibt. Führen wir die Linie durch Fig. 12, so dafs alle drei geschnitten werden, so erhalten wir Fig. 19. Führen wir die Linie in jener Fig. 12 aber so, dafs sie der *c* parallel geht, so erhalten wir Fig. 20. Ein anderer Fall ist im Allgemeinen nicht möglich.

§. 38.

Ist von den vier Reduktionsebenen eine zur Projektionsebene geworden, so stellt Fig. 11. *Tab.* II. *das Projektionsbild dar.*

Sobald wir sagen, eine Ebene des Krystalls wird selbst zur Projektionsebene, so meinen wir, dafs die Projektionsebene jener Krystallebene parallel gehe. Dann leuchtet aber auch ein, dafs diese Krystallebene durch keine sichtbare Sektionslinie in der Figur dargestellt sein kann. Von den 6 Richtungen treten die Zonenpunkte der Kanten *ab, ac* und *bc* noch unmittelbar hervor, aber die andern drei *ad, cd* und *bd* gehen von dem gemeinsamen Punkt *x* aus den Sektionslinien *a, c* und *b* parallel, treffen

also die Sektionsebenen nie, weil die *d* die Sektionsebene nie trifft. Der Satz macht dem Anfänger einige Schwierigkeit.

§. 39.

Lassen wir unsere vier Reduktionsebenen sich zu Krystallräumen entfalten, so entsteht ein Oktaid mit 8 Flächen und 6 Zonen.

Dafs der dadurch sich bildende Körper 8 Flächen habe, versteht sich von selbst, weil die vier Krystallräume durch 8 Gränzflächen eingeschlossen sind; eben so, dafs er sechs Zonen habe, weil ja ausser den sechs Zonen, durch die gleiche Anzahl von Zonenpunkten angedeutet, durch Parallelbewegung der Flächen keine neue eintreten kann. Schon aus der Betrachtung des Hexaides wird diefs klar. Die drei Krystallräume *a*, *b* und *c* hatten drei Zonen. Schneidet nun ein neuer Krystallraum diese 3, so mufs er ja mit jedem der frühern eine neue Kante bilden, was drei neue Richtungen gibt, die noch hinzukommen.

Zusatz. Wir rathen auch hier dem Anfänger, sich durch acht Schnitte obigen Körper zu verschaffen, er darf nur noch vom Hexaid durch 2 parallele Schnitte irgend zwei gegenüberstehende Ecken wegschneiden. Dadurch wird ihm alles Gesagte sogleich klar werden.

§. 40.

Die Flächen des Oktaides sind viererlei, von denen jedem Krystallraume eine zugehört, und in jeder Fläche liegen drei Richtungen.

Der Satz steht in Fig. 18 einfach geschrieben. Da jede Sektionslinie 3 Zonenpunkte hat, so folgt, dafs die zur Sektionslinie gehörige Reduktionsebene ebenfalls von drei Reduktionsebenen in drei verschiedenen Richtungen geschnitten werden mufs. Denkt man sich, dafs die Reduktionsflächen zu Krystallräumen werden, so kann zwar die Anzahl der Kanten auf einer Fläche doppelt werden, allein es müssen davon stets je zwei einander parallel lau-

fen. Mögen daher 6ecke, 5ecke, 4ecke oder 3ecke entstehen, so können diesen nur drei Richtungen zu Grunde liegen. Oder man kann sich auch das Oktaid als Hexaid denken, mit zwei durch einen Krystallraum abgestumpften Ecken. Die Abstumpfungsflächen können so tief in das Hexaid eindringen, dafs sie sämmtliche 6 Flächen desselben schneiden, und dadurch zu Sechsecken werden mit drei Kanten, die jede ihre Parallele haben. Die Flächen des Hexaides müssen dadurch Trapeze werden (vierseitige Figuren mit einem parallelen Linienpaare). Füglich darf man aber das Oktaid als aus vier Hexaiden gebildet ansehen, an welchem Hexaide stets die vierte Fläche die Ecke abstumpft. Es folgt dieser Satz aus der Combinationslehre, vier Flächen (*a*, *b*, *c*, *d*) lassen sich vier verschiedene Male (*abc*, *abd*, *acd*, *bcd*) zu drei kombiniren. Also kann durch Ausdehnung jede Fläche möglicher Weise zum 6eck werden. Dafs die parallelen Flächen eines Krystallraumes sich gleich werden können, folgt aus der Parallelität aller ihrer Linien.

Zusatz. Wir begegnen hier zum ersten Male dem Begriffe: *Abstumpfung einer Ecke.* Abgestumpft wird dann eine Ecke, wenn von ihren Kanten und Flächen durch eine hinzugekommene Fläche ein Stück abgeschnitten wird, so dafs an die Stelle der Ecke die neue Fläche selbst tritt.

§. 41.

Das Oktaid ist im Gleichgewicht, sobald alle Flächen in ihrer Bewegung zu Dreiecken geworden sind.

Die frühern geschlossenen und nicht geschlossenen Körper hatten alle die Eigenthümlichkeit, dafs die Krystallflächen durch ihre parallele Bewegung keine andere Gestalt bekamen, sondern die Krystallflächen blieben stets bei jeder nur denkbaren Verziehung entweder unendliche Ebenen durch zwei Parallelen begränzt (Säulenflächen), oder Parallelogramme (Hexaid-, Vierzonenkörperflächen), oder Sechsecke (Endfläche der Vierzonenkörper). Beim

Oktaid tritt zuerst der Fall ein, dafs durch die parallele Bewegung die Krystallflächen bald mit diesen, bald mit jenen Flächen zum Schnitt kommen können, doch ist bei beliebigen Krystallräumen stets ein Fall da, wo alle 8 Flächen zu Dreiecken werden. Man kann die Möglichkeit eines solchen Oktaides leicht am Hexaide nachweisen. Stellt man ein beliebiges Hexaid nach irgend zwei sich gegenüberliegenden gleichen Ecken ($\alpha...\alpha$) aufrecht (Tab. IV. Fig. 1), legt dann durch die obern drei Seitenecken β, γ, δ eine Fläche, so bildet diese mit den drei Hexaidflächen ein Dreieck, die Seiten des Dreiecks sind Diagonalen der drei Hexaidflächen; ein gleiches Dreieck $\alpha\beta\gamma$ kann man durch die untern drei Ecken legen. Das obere Dreieck $\beta\gamma\delta$ mufs aber dem untern parallel gehen, da sämmtliche drei Seiten in beiden respektive parallel sind. Denn z. B. ein Viereck $\beta\gamma\beta\gamma$ mufs ein Parallelogramm sein, da die beiden sich gegenüberliegenden Hexaidkanten $\beta\gamma$ parallel und gleich sind. Folglich liegt zwischen den beiden Flächen $\beta\gamma\delta$ ein Krystallraum. Der neue Körper besteht daher aus 4 Krystallräumen, und da sämmtliche Hexaidflächen durch den Schnitt zu Dreiecken geworden sind, so bilden die 4 Krystallräume einen Körper, der nur von Dreiecken begränzt ist. Diesen Satz vorausgeschickt, können wir nun leicht jede vier beliebigen Krystallräume in ein Oktaid von verlangter Beschaffenheit verwandeln. Wir schieben die vier Krystallräume so lange, bis eine Fläche eines Krystallraumes zum Dreieck wird (wir dürfen ja nur in einem beliebigen Hexaide durch die Fläche des vierten Krystallraumes die Ecke so abstumpfen, dafs die Abstumpfungsfläche ein Dreieck ist), dieses Dreieck z. B. $\beta\gamma\delta$ mufs dann mit den drei anliegenden Flächen drei dreiseitige Ecken β, γ und δ bilden; die 3 den letztern parallel gehenden Flächen rücke ich nun weiter in jene Ecken (β, γ, δ) hinein, so mufs auch die 8te Fläche $\beta\gamma\delta$, die der obern $\beta\gamma\delta$ parallel geht, parallel mit sich verrückt, durch die drei untern Seitenecken des Hexaides

jener drei Flächen gehen, nach dem vorausgeschickten Satze.

Zusatz 1. Das entstehende Oktaid im Gleichgewicht kann bald grofs, bald klein ausfallen, aber die grofsen Oktaide sind den kleineren genau ähnlich, weil durch die parallele Verschiebung der Ebenen alle homologen Winkel unter sich gleich bleiben müssen. Jede 4 Krystallräume bilden daher nur ein einziges Oktaid im Gleichgewicht, da man in der Krystallographie mathematisch ähnliche Formen gleich nennt.

Zusatz 2. Die Eigenschaften eines Oktaides zu ergründen, dürfte dem Anfänger etwas schwierig werden. Er nehme ein Oktaid im Gleichgewicht (oder vier beliebige Flächen, die sich in einem Punkte x schneiden) zur Hand, (Tab. IV. Fig. 3 und Fig. 2) und bezeichne die Krystallräume der Reihe nach mit a, b, c, d. Vier Kanten a/b, b/c, c/d und d/a (1, 2, 3, 4) strahlen vom Punkte x aus, man nennt diese in Beziehung auf den Punkt x (wenn man x aufrecht denkt) die vier *Endkanten*, sie bilden die Seitenschenkel der 4 Dreiecke, welche um x gelagert sind. Die beiden übrigen Kanten (5 und 6), welche mit ihren Parallelen die Basis jener Endkantendreiecke bilden, heifsen *Seitenkanten*. Diese Seitenkanten haben dieselbe Richtung, als die Kanten a/c und b/d (7, 8), die durch den Punkt x gehen, und von den im x sich gegenüber liegenden Flächen ac und bc gebildet werden würden, sobald die Flächen nur gehörig sich ausdehnten. Wir nennen sie die *versteckten Kanten*. Wenn wir das Oktaid als aus sechs vierseitigen Säulen gebildet ansehen wollen, so würden in den versteckten Kanten die Komplementkantenwinkel der 6 Säulen liegen. Sobald das Oktaid sich verschiebt (wie diefs in der Natur der Fall ist), so treten mehrere der versteckten Kanten hervor; sobald es im Gleichgewicht ist, tritt keine der versteckten hervor. Wir sehen auch leicht ein, dafs bei Verschiebung in jeder Ecke höchstens nur *eine* ver-

steckte Kante auftreten kann, beide können in einer Ecke nie zugleich erscheinen. Die Komplementkantenwinkel der versteckten sind stets alle vorhanden, man könnte sie daher *offenbare Kanten* nennen; von diesen spricht man meist nur allein in den gewöhnlichen Krystalllehren. Ein verschobenes Oktaid ist daher ein solches, wo sich zu den offenbaren Kanten auch versteckte gesellen. Möglicher Weise können sich nur 6 versteckte Kanten (0, 7, 8, 9, 10, 11) zu den offenbaren (1, 2, 3, 4, 5, 6) gesellen, so dafs das gröfstmöglich verschobene Oktaid 12 offenbare und 6 versteckte, zusammen 18 Kanten (wenn man die Parallele mitzählt), haben kann. Weniger als 12, mehr als 18 können durch keine Verschiebung auftreten, voraus gesetzt, dafs die 8 Gränzflächen der 4 Krystallräume sämmtlich auftreten. Wir sehen hierin einen sehr auffallenden Unterschied des Oktaides von allen früheren Formen. Denn bei diesen konnten durch keine Verschiebung versteckte Kanten auftreten, sondern bei jeder Verschiebung waren alle Kanten vorhanden; beim Oktaide treten zuerst versteckte Kanten auf, und dadurch ist eine Gränzbestimmung möglich gemacht. Eliminiren wir alle versteckten Kanten, so haben wir das Oktaid im Gleichgewicht, als die eine Gränze; lassen wir aber alle offenbaren und versteckten zugleich erscheinen, so müssen wir z. B. *b* und *d* vorzugsweise ausdehnen, doch die ihnen parallelen Ebenen nicht, *a* und *c* dagegen klein werden lassen; die ihnen parallelen Ebenen aber grofs, dann neigt sich die Form zum Tetraeder, die bei der völligen Ausdehnung der bezeichneten Flächen wirklich eintritt, aber nur 6 versteckte (keine offenbaren) Kanten hat ....; der denkende Leser wird diesen Satz noch weiter verfolgen, eine Aufgabe, die wir uns erst weiter unten stellen. In der Figur 3 sind 1, 2, 3, 4, 5, 6 die offenbaren, 0, 7, 8, 9, 10, 11 die versteckten Kanten.

§. 42.

Die verschiedenen Arten der Oktaide sind durch fünf Kantenwinkel mathematisch bestimmt.

Da nach §. 39 das Oktaid sechs Zonen hat, so kann man es auch als aus sechs vierseitigen Säulen gebildet ansehen (vier Krystallräume *a, b, c, d* kann man 6mal zu zwei combiniren *ab, ac, ad, bc, bd* und *cd*). In diesen 6 Säulen wären 6 Kanten zu bestimmen (§. 15). Allein aus dem Flächenconnex folgt, dafs der 6te stets durch fünf bestimmt ist. Das Hexaid Tab. II Fig. 18 mit den drei Zonenpunkten 1, 2 und 3 ist, wie jede körperliche Ecke in der Stereometrie, durch die drei in diesen Zonenpunkten liegenden Kantenwinkel bestimmt (§. 25). Daraus folgen auch die drei ebenen Winkel 1x2, 2x3, 3x1 (x der gemeinsame Punkt ausserhalb der Projektionsebene). Kommt zu den drei Sektionslinien noch eine vierte (456) hinzu, so entsteht ein Hexaid mit den Zonenpunkten 3, 4 und 5, darin ist die Kante des Punktes 3 schon gegeben, also 4 und 5 nur noch zu kennen, wodurch dann auch dieses Hexaid bekannt ist. Es bleibt demnach nur noch eine unbekannte Kante 6 über. Die 6 liegt aber im Hexaide mit den Zonenpunkten 1, 5 und 6. 1 und 5 ist bereits bekannt; es ist aber auch noch der ebene Winkel 1x5 bekannt, als die Differenz von den bekannten 1x3 und 5x3, folglich ist aus diesen die Kante des Zonenpunktes 6 bestimmbar.

Zusatz 1. Es versteht sich, dafs es eine Menge besonderer Oktaide (wie das auch von allen vorhergehenden Körpern und Säulen gilt) geben kann, wo mehrere der 5 Winkel unter sich gleich werden, so dafs man nicht 5 Winkel zu bestimmen braucht. Allein im Grunde mufs man dennoch 5 kennen, um über die Beschaffenheit des Oktaides ein Urtheil zu haben. Wenn man bei der Untersuchung gewahrt, dafs mehrere gleich werden, so wird die Rechnung um so einfacher.

Zusatz 2. Der ebenen Winkel sind 8, in jedem Dreieck

3 *

zwei, wie auch auf der Projektion steht, nämlich: auf Sektionslinie 1...2 Winkel 1x6 und 6x2; auf 1...3 Winkel 1x5 und 5x3; auf 2...4 Winkel 2x3 3x4; auf 4...6 Winkel 4x5 und 5x6. Man sieht leicht aus der Figur, dafs auch von diesen 5 hinreichend sind, alle Gröfsen des Oktaides zu bestimmen.

§. 43.

Das Oktaid im Gleichgewicht hat drei verschiedene vierkantige Ecken.

Stellen wir ein solches Oktaid auf einen seiner Krystallräume z. B. *d*, so bilden die drei Gränzflächen der drei Krystallräume *a*, *b*, *c* die drei Seiten der obern Gränzfläche des Krystallraumes *d*, von denen je 2 die Ecken des Dreiecks bilden; die drei parallelen Gränzflächen derselben Krystallräume stofsen aber ebenfalls mit den Ecken des Dreiecks zusammen, also müssen hier drei vierkantige Oktaidecken entstehen. Die drei vierkantigen Ecken an der untern Gränzfläche desselben Krystallraumes liegen den ersten dreien homolog, sind ihnen respektive congruent; da z. B. die beiden Ecken in *c* und *c* (Tab. V. Fig. 1.) dieselben 4 Kanten, dieselben vier ebenen Winkel und die Gränzflächen gleicher Krystallräume haben. Man nennt solche gleiche Ecken *c* und *c'*, *b* und *b'*, *a* und *a'* gegenüberstehende.

§. 44.

Jedem Oktaide im Gleichgewicht lassen sich 3 Axen unterlegen, welche die gegenüberstehenden Endpunkte verbinden.

Axen eines Krystallkörpers im Gleichgewicht sind diejenigen Verbindungslinien einzelner Theile (Glieder) desselben, welche sich in einem gemeinsamen Mittelpunkte schneiden. Die 6 Zonen des Oktaides sind durch 12 Kanten bezeichnet, von welchen jeder Zone 2 angehören, daher findet sich zu jeder Oktaidkante eine parallele. Legen wir durch die 4 Kanten *cb'c'b* des Oktaides Tab. V. Fig. 1 eine Fläche, so ist diese ein Parallelogramm, worin *c*...*c'*

die Diagonale. Legen wir weiter durch $c'aca'$ ein Parallelogramm, so ist in selbigem $c...c'$ ebenfalls die Diagonale. Wenn die Diagonale aber beiden Parallelogrammen gemein sein soll, so muſs sie die Durchschnittslinie beider sein. Ebenso wird das dritte Parallelogramm durch $b'aba'$ gelegt die beiden vorhergehenden Parallelogramme in $b...b'$ und $a...a'$ schneiden. Demnach haben je zwei Parallelogramme eine Diagonale gemein. Im Parallelogramme $cb'cb'$ schneiden sich die zwei Diagonalen $c...c'$ und $b...b'$ im Mittelpunkte, müssen sich folglich auch da halbiren. Ebenso schneiden sich $b'...b$ und $a...a'$ im Parallelogramme $ba'ba'$ und halbiren sich in demselben Punkte. Mithin halbiren sich alle drei in einem Punkte. Solche Linien nennt man *Axen.*

Zusatz. Bei allen unsern vorhergehenden Körpern war es nicht möglich Axen zu ziehen, weil man keine bestimmten Punkte finden konnte, worin die Flächen gerückt eine andere Beschaffenheit angenommen hätten. Denn bei der Säule waren die Flächen stets nur von zwei Parallellinien begränzt; beim Hexaide waren alle, unter jeder beliebigen Verschiebung, dennoch Parallelogramme. Auch beim Vierzonenkörper konnten die Säulenflächen nur Parallelogramme, die Endfläche nur ein Sechseck sein. Das Oktaid ist daher durch die Veränderlichkeit seiner Flächengestalten von allen frühern verschieden.

§. 45.

Die Länge der Axen ist nicht absolut, sondern relativ constant. Die von den Axen eingeschlossenen Winkel bleiben sich stets gleich.

Da nach §. 41. *Zusatz* alle Oktaide im Gleichgewicht, die aus vier gegebenen Flächen entstehen, sich ähnlich sein müssen, so müssen auch die durch die Axen gelegten Parallelogramme (Tab. V. Fig. 1. $cb'c'b$, $b'aba'$, $cac'a'$) in den verschiedenen ähnlichen Oktaiden sich respektive ähnlich sein, folglich auch das Längen-Verhältniſs der drei Axen $c...c'$, $b...b'$ und $a...a'$ dasselbe bleiben. Gibt man daher der Axe

$c \ldots c'$ eine beliebige Einheit, so müssen $b \ldots b'$ und $a \ldots a'$ zu dieser Einheit immer dasselbe Verhältnifs haben. Es sei z. B. $c \ldots c' = 1'$, $b \ldots b' = 2'$ und $a \ldots a' = 3'$ bei einem Oktaide im Gleichgewicht; dehne ich nun dasselbe Oktaid aus, aber dergestalt, dafs die Flächen im Gleichgewicht bleiben, so mag bei dieser Ausdehnung $c \ldots c' = 2'$ werden. Vergleicht man nun die beiden andern, so würden sie auch um das Doppelte gewachsen sein, also $b \ldots b' = 4'$ u. $a \ldots a' = 6'$. Daraus folgt, dafs man einer der drei Axen eine beliebige Gröfse geben kann, nur müssen dann immer die andern beiden darnach proportional verändert werden. Man sagt, die Länge der Axen ist nicht absolut, sondern relativ constant. Eben so leicht folgt aus der Aehnlichkeit der Parallelogramme, dafs die Winkel *cob*, *coa* und *boa* (wenn wir den Mittelpunkt mit *o* bezeichnen), welche die Axen unter sich machen, immer dieselben bleiben.

Zusatz. Es versteht sich, dafs man nur dem Oktaide im Gleichgewicht drei solche Axen unterlegen kann. Wenn man von Axen anderer Oktaide, die nicht im Gleichgewichte sind, spricht, so meint man immer die Richtung derjenigen Axen, welche das Oktaid haben würde, wenn man sich dasselbe ins Gleichgewicht gebracht dächte.

Recapitulatio I.

Wir machen den Leser wiederholt auf die Consequenz des Ganges aufmerksam, der durch das Ganze sich so bestimmt hindurchzieht, dafs neben dieser Methode kaum eine andere bestehen dürfte.

1) Ist der Raum als die bestimmungslose Form mit drei unendlichen Dimensionen zu Grunde gelegt.

2) Folgt der Krystallraum, der noch nach zwei Dimensionen unendlich, aber nach der dritten schon begränzt erscheint.

3) Durchdringen sich zwei Krystallräume, und bilden

den 4seitigen Säulenraum, welcher schon 2 begränzte Seiten bei einer unbegränzten zeigt. Hier schliefsen sich dann die 6, 8.... 2n seitigen unbegränzten Säulenräume an.

4) Kommt der nach allen drei Dimensionen begränzte Raum, der erste Körper, das Hexaid, mit 3 Richtungen. Es sind demnach offene oder geschlossene Räume mit 2 Dimensionen nicht denkbar.

5) Folgt der Vierzonenkörper (Säule mit einer Endfläche), aber auch er ist noch unbestimmt, wie das Hexaid; bis zuletzt

6) das Oktaid mit 6 Zonen erlangt ist. Ihm können zuerst Axen untergelegt werden, und somit beginnt mit dem Oktaide eine neue Reihe von Betrachtungen.

Dieselbe Consequenz liegt auch in der bestimmten Zahl der Kantenwinkel.

1) Der Krystallraum bleibt in Rücksicht auf Kantenwinkel bestimmungslos, seine parallelen Bewegungsflächen schliefsen einen Winkel von 0° d. h. keinen ein.

2) Die vierseitige Säule ist durch einen Kantenwinkel nach allen ihren Theilen bestimmt.

3) Zwei Kantenwinkel bestimmen die 6seitige Säule.

4) Drei Kantenwinkel das Hexaid und die 8seitige Säule.

5) Vier Kantenwinkel den Vierzonenkörper und die 10seitige Säule.

6) Fünf Kantenwinkel das Oktaid und die 12seitige Säule.

Dafs neben jedem Körper noch eine Säule steht, liegt in der nothwendigen Reihenentwickelung. Zugleich sehen wir auch, wie durch die Zahl der Kantenwinkel kein Zweizonenkörper bestimmt sein kann.

Eine nicht minder deutliche Consequenz leuchtet aus den Sektionslinien hervor.

1) Vier Sektionslinien bezeichnen eben so viel Reduktionsebenen von Krystallräumen. Zieht man solche vier Linien nach jeder nur möglichen Richtung in ei-

ner Ebene, so können sie nichts anderes als die Projektionsfiguren von vier Krystallräumen darstellen: die 8seitige Säule, den Vierzonenkörper und das Oktaid, als den allgemeinsten Körper.

2) Drei Sektionslinien, die Repräsentanten eben so vieler Krystallräume, können nur die 6seitige Säule und das Hexaid bezeichnen.
3) Zwei Sektionslinien die vierseitige Säule.
4) Eine Sektionslinie den Krystallraum.

So sehen wir die Spaltung des Raumes durch Ebenen nach allen Möglichkeiten erschöpft.

Deduktionslehre.

§. 46.

Deduktionsebenen sind solche Ebenen, die durch die verschiedenen Kanten eines Körpers bestimmt sind.

Wenn wir ein Hexaid oder einen Vierzonenkörper nehmen, so können wir durch die bereits vorhandenen Kanten keine Fläche legen, welche bestimmt wäre nach der Regel des §. 9. Es folgt diefs unmittelbar aus den Projektionsfiguren dieser Körper, weil dieselben schon unter sich durch Sektionslinien verbundene Zonenpunkte haben. Ganz anders verhält sich diefs beim Oktaide. Vergleichen wir das Projektionsbild desselben (Tab. II. Fig. 18.), so finden wir die Zonenpunkte 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 noch nicht mit einander verbunden. Denken wir uns daher durch diese Punkte Sektionslinien, d. h. durch die ihnen entsprechenden Kantenzonen Reduktionsebenen gelegt, so werden diese uns einen abgeleiteten Krystallkörper geben, welcher durch das Oktaid genau bestimmt ist. Der Körper ist ein deducirter *(Deduktionskörper)*; seine Flächen *Deduktionsflächen.*

§. 47.

Aus jedem gegebenen Oktaide kann ein Hexaid deducirt werden.

Wir sehen, dafs in der allgemeinen Projektionsfigur des Oktaides (Tab. II. Fig. 18.) jeder einzelne Zonenpunkt durch seine zwei Sektionslinien mit vier Punkten zwar verbunden ist, mit dem 5ten aber unverbunden dasteht. Daher müssen wir noch drei Linien (3...6, 2...5, 1...4 Tab. II. Fig. 21.) ziehen, damit alle Punkte unter sich verbunden erscheinen. Diese drei Linien, welche durch die schon vorhandenen Zonenpunkte bestimmt sind, schneiden sich unter drei neuen Zonenpunkten. Daher mufs der Körper, welcher diesen Sektionslinien angehört, ein Hexaid sein. Beide Körper, das Oktaid verbunden mit seinem zugehörigen Hexaide, zeigen 6 sechsseitige Säulen, die in den Kanten des Oktaides liegen, und 3 vierseitige, welche die Kanten des Hexaides bilden.

Zusatz. Dem Anfänger wird es nicht ganz leicht sein, sich aus der Projektionsfigur den Krystallkörper zu entwickeln. Allein er nehme nur ein Oktaid (Tab. IV. Fig. 2.) zur Hand. Wir sehen, dafs von den 6 verschiedenen Richtungen (Kanten) des Oktaides je drei bereits durch die Oktaidflächen verbunden sind. Allein je 2 kann man noch verbinden, d. h. der Kante a/b und c/d parallel, die sich in x gegenüberliegen, läfst sich eine Ebene legen, sowie eine zweite der Kante b/c und a/d, endlich eine dritte den Seitenkanten, welche die Basis der Dreiecke a, b, c und d bilden, parallel. Letztere z. B. würde die Ecke x abstumpfen, aber so, dafs sie mit den Seitenkanten $y...z$ parallele Kanten bildet. Die neu entstehende Hexaidfläche (h) müfste also ein Parallelogramm sein, welches dem Parallelogramm $yzyz$ genau ähnlich ist. Wie die Ecken x, so verhalten sich auch die andern beiden Ecken zu den ihnen entsprechenden Kanten. Man ersieht auch zugleich, dafs durch die Fläche h den Oktaidkanten yz parallel sechsseitige

Säulen entstehen müssen, denn die drei Flächen *bhd*, drei Krystallräumen angehörend, sowie *ahc* liegen je in einer Zone, wie aus der Parallelität ihrer Kanten ersehen wird.

§. 48.

Wie das Hexaid die Ecken des zugehörigen Oktaides, so stumpft das Oktaid die Ecken des zugehörigen Hexaides ab.

Dafs das Hexaid die Ecken des Oktaides abstumpfen mufs, wird sowohl an der Projektionsfigur, als auch an einem Modelle an sich klar. Flächen, die in drei Oktaidkanten liegen, sind ausser den Oktaidflächen nicht mehr da; daher kann man nur noch Flächen legen, die in zwei Kanten zugleich fallen, d. h. zwei Kanten zugleich parallel gehen (die nur in einer Kante liegenden Flächen sind jetzt ausgeschlossen); aber solche Flächen können allein die Ecke abstumpfen, weil sie weder den Flächen, noch dreien oder einer Kante des Oktaides parallel gehen sollen. Eben dasselbe gilt vom Oktaide am Hexaide. Da die Oktaidfläche (Tab. II. Fig. 18) ausserhalb der drei Kanten des zugehörigen Hexaides liegt, so bleibt ihr nichts übrig, als dafs sie die Ecke abstumpfen mufs. Denn sollte sie die Kante abstumpfen, so müfste die Oktaidfläche ja in die Kantenzone des Hexaides fallen. Die Abstumpfung der Hexaidecke durch die Oktaidfläche kann durch Zonen nicht bestimmt werden, daher ist keine Deduktion aus dem Hexaid möglich. Hingegen die Hexaidfläche, welche zum Oktaide gehört, ist stets ein Parallelogramm, dessen zwei Richtungen (Seiten) mit zwei Oktaidkanten zusammen fallen.

§. 49.

Das Oktaid ist auf seine ihm zugehörige Hexaidfläche durch zwei Paare paralleler Sektionslinien projicirt. (Tab. II. Fig. 20).

Da die Hexaidfläche die Oktaidecke abstumpft, wo sich 4 Gränzflächen der vier verschiedenen Krystallräume

schneiden, so muſs auf der Hexaidfläche selbst genau die Projektionsfigur gezeichnet sein. Die Hexaidfläche muſste aber (§. 47) stets ein Parallelogramm werden, folglich unsere Figur 20. Tab. II. Man darf nur ein Oktaid auf die Spitze stellen, eine Hexaidfläche der unterliegenden Ebene parallel, und dann vier Flächen ausgedehnt denken, so müssen je zwei in der Ecke sich gegenüberliegende Flächen die Unterlage unter parallelen Sektionslinien schneiden. Das entstehende Parallelogramm ist dem basischen Schnitte des Oktaides ähnlich.

§. 50.

Die drei Axen des Oktaides gehen mit den Kanten des ihm zugehörigen Hexaides parallel. (Tab. II. Fig. 22).

Sobald das Oktaid auf die ihm zugehörige Hexaidfläche projicirt ist, so kann man die Projektionsebene in den zwei Seitenkanten gelegen denken. Dann liegen aber auch zwei Axen (5...5 und 6...6) in derselben Projektionsebene, während die dritte von x aus zum Durchschnittspunkte o geht. Nun gehen die Linien ox, 5...5 und 6...6 den zwei Kantenrichtungen des Hexaides, welches auf eine seiner Flächen projicirt ist, parallel (§. 22). Da aber 5...5 und 6...6 in zwei Kanten des Oktaides liegen, sind sie, wie die Projektionsebene selbst, zugehörige Hexaidflächen. Es fallen also Hexaidkanten und Oktaidaxen zusammen (d. h. die Richtungen beider sind dieselben).

§. 51.

Jede Oktaidfläche schneidet sämmtliche Kanten ihres zugehörigen Hexaides unter demselben Verhältnisse, wie sie das untergelegte Axenkreuz schneidet.

Wir haben bisher immer gesehen, daſs die Kanten derselben Bewegung unterworfen waren, wie die Flächen. Man würde daher letztere nie auf Kanten oder Axen beziehen können, wenn nicht *jedes Axensystem, durch parallele Bewegung in einen beliebigen Punkt des Raumes*

versetzt, von ein und derselben Fläche, ebenfalls in ihrer Bewegung gedacht, stets unter demselben Verhältnisse geschnitten würde. Denn denken wir uns, zwei sich in o schneidende Linien a und b (Tab. II. Fig. 23) würden von einer Ebene A unter irgend einem Verhältnisse geschnitten, so wird es gleichgültig sein, ob wir A oder die beiden Axen oder Axen und Ebene zugleich unter sich fortbewegen, es würden $a:b$ immer denselben Quotient bilden (§. 45). Die verschiedenen Durchschnittslinien, welche A mit der Axenebene ab macht, müſsten sich ja immer parallel bleiben. Legen wir nun eine dritte Axe c durch o, so würden ac und bc sich ebenso verhalten gegen die A, so daſs das Verhältniſs $a: b: c$ durch keine parallele Bewegung der Flächen wie der Axen verändert werden kann. Wenden wir diesen Satz auf unser Hexaid an, so haben wir 8 verschiedene Eckpunkte, deren jeder einen Durchschnittspunkt von Axenkreuzen vorstellt. Die einzelnen Axen je zweier Kreuze gehen entweder sämmtlich mit einander parallel, oder sind theilweis dieselben. Schneidet daher eine Oktaidfläche irgend ein solches Axenkreuz unter einem bestimmten Verhältnisse, so muſs dieselbe Fläche jedes der übrigen Kreuze unter demselben Verhältnisse schneiden. Da nun aber das Axenkreuz des Oktaides dreien dieser Hexaidkanten parallel läuft, so muſs auch jenes bestimmte Verhältniſs mit dem Verhältnisse der Oktaidaxen übereinkommen.

Zusatz. Aus diesem Satze geht hervor, daſs die Axen in keinem bestimmten Punkte liegen, sondern wie die Flächen durch jeden Punkt gehen; daher gilt jedes einzelne Stück eines Krystalls soviel, als der ganze Krystall.

§. 52.

Geben wir dem Oktaide das allgemeine Zeichen $\overline{|a : b : c|}$, *so bekommt das Hexaid* $\overline{|a : \infty b : \infty c|}$ (Tab. IV. Fig. 4, worin die Axe c aufrecht gedacht wird).

Es ist allgemein bei Mathematikern eingeführt, daſs

man die Ebenen auf die Dimensionen des Raums bezieht. Das Zeichen soll weiter nichts bedeuten, als daſs die Flächen des Oktaides im Gleichgewicht ihr Axenkreuz unter dem Verhältniſs $a : b : c$ schneiden, die Länge der Axen vom Mittelpunkt o gerechnet; das umschlieſsende Parallelogramm ($[\quad\quad]$) soll anzeigen, daſs wir die Axen noch ganz allgemein unter jedem Winkel sich schneidend denken wollen. Da jedes Axenkreuz 8 Oktanten hat, so kann man 8 verschiedene Flächen unter dem Zeichen meinen. Wenn wir irgend eine dieser auszeichnen, so geben wir den Axen theilweis noch Striche. Den vordern rechten Quadranten wollen wir uns ohne Striche $[a : b : c]$ denken, aber die diesem Krystallraume entsprechende Parallele $[a' : b' : c']$ zeichnen. Hieraus folgen alle andern, nämlich: die Fläche des vordern linken $[a : c : b']$, ihre Parallele $[a' : c' : b]$; die Fläche im rechten hintern $[b : c : a']$ und ihre Parallele $[b' : c' : a]$; endlich die Fläche des hintern linken $[a' : b' : c]$ und ihre Parallele $[a : b : c']$. Wir sehen, daſs die Parallelen in Rücksicht auf ihre Striche entgegengesetzt sich verhalten. So oft wir jedoch im Allgemeinen von dem Oktaide sprechen, denken wir uns unter seinem Zeichen $[a : b : c]$ alle Flächen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird. Das Hexaidzeichen $[a : \infty b : \infty c]$ soll bedeuten, daſs die Fläche durch eine Axe a geht, die andern beiden b und c aber im Unendlichen schneidet, d. h. ihnen parallel liegt. Daſs das Hexaid sich zu den Oktaidaxen wirklich so verhalte, folgt aus der Projektionsfigur. Denn jede Hexaidfläche liegt in zwei Kanten, die Endpunkte dieser Kanten sind aber immer durch zwei Axen verbunden, daher muſs

die Hexaidfläche auch diesen Axen parallel gehen. Auch das Hexaidzeichen ist sechsdeutig. Unter $/a' : \infty b : \infty c/$ müssen wir uns die Parallele obiger denken; die Fläche $/b : \infty a : \infty c/$ mit ihrer Parallele $/b' : \infty a : \infty c/$ und die $/c : \infty a : \infty b/$ mit ihrer Parallele $/c' : \infty a : \infty b/$ ergeben sich in Rücksicht auf ihre Lage zum Axenkreuz leicht. So oft wir jedoch im Allgemeinen sprechen, wollen wir auch hier unter dem Zeichen $/a : \infty b : \infty c/$ die 6 Flächen zusammen verstehen.

Zusatz. Dafs diese Bezeichnung der Flächen die einzige naturgemäfse sei, welche zuerst von Professor WEISS eingeführt wurde, wird sich aus dem Verlauf der Darstellung von selbst ergeben. Wir können auch ausser den Flächen die Kanten auf dieselben Axen beziehen. Kante

$$/a : c/, \quad /a' : c/, \quad /b : c/ \text{ und } /b' : c/$$

sind die vier Endkanten des Oktaides, wenn

$$/a : b/ \quad \text{und} \quad /a : b'/$$

oder ihre Parallelen die Seitenkanten sind. Ebenso drücken die Zeichen

$$/c : \infty a/, \quad /c : \infty b/, \quad /a : \infty c/, \quad /b : \infty a/$$

u. s. w. die Richtungen der Hexaidkanten aus.

§. 53.

Verbinden wir die Hexaidkanten mit den Oktaidkanten durch Flächen, so bekommen wir ein Dodekaid (Tab. II. Fig. 1.).

Wir haben §. 47. gesehen, wie uns durch die Verbindung der Oktaidkanten das erste Deduktionshexaid geworden. Legen wir dieselbe Figur wieder zu Grunde, so findet sich weiter, dafs von den drei neu entstandenen Deduktionshexaidkanten abermals jede mit 2 Oktaidkanten noch nicht verbunden ist. Führen wir dieses aus, so bekommen wir 2 . 3 = 6 neue Sektionslinien, die eben so

vielen Reduktionsebenen angehören, wie diefs Tab. II. Fig. 1. ausgeführt ist (8, 9, 10, 11, 12, 13). Der Körper hat demnach 6 Krystallräume oder 12 Krystallflächen.

§. 54.

Verzeichnen wir das deducirte Dodekaid besonders, so gleicht die Projektionsfigur einer Oktaidfigur mit abgestumpften Seitenecken (Tab. II. Fig. 24.).

Der denkende Leser wird bei der frühern allgemeinen Projektion des Oktaides (Tab. II. Fig. 18.) schon bemerkt haben, dafs vier Zonenpunkte (1, 3, 5, 6) derselben stets in einem Trapezoide liegen, während die beiden andern ausserhalb des Trapezoides fallen. Die vier Zonenpunkte des Trapezoides bezeichnen stets die 4 Endkanten, und die zwei die Seitenkanten des Oktaides, bezogen auf diejenige Ecke, welche der gemeinsame Punkt x bezeichnet. Auch bei der besondern Projektion des Oktaides auf die Hexaidfläche Fig. 20. ist dies Viereck noch vorhanden. Die beiden andern Ebenen, 12 und 13, verbinden aber die gegenüberstehenden Punkte des Trapezoides, müssen daher in die Endkanten des Oktaides (8, 9, 10, 11) fallen, d. h. zwei Hexaidflächen sein. Daraus folgt, dafs das Dodekaid nur 7 Zonenpunkte (4 drei- und 3 zweilinige) haben kann.

Zusatz. Dafs es ausser dieser allgemeinen Projektionsfigur noch eine Menge besonderer gibt (so viel Verbindungen von 6 Linien mit 7 Zonenpunkten möglich sind), sehen wir ein. Doch alle diese aufzuführen hat wenig wissenschaftliches Interesse. Gelegentlich werden wir auf einige zurückkommen.

§. 55.

Das Dodekaid ist im Gleichgewicht, sobald seine versteckten Kanten der drei vierseitigen Säulen verschwunden, und nur die Kanten der 4 sechsseitigen sichtbar sind. Die 12 Dodekaidflächen sind dann immer Parallelogramme.

Um ein Dodekaid ins Gleichgewicht zu bringen, bringen wir erst 4 Krystallräume desselben, die ein Oktaid bilden, ins Gleichgewicht (z. B. 8, 9, 10, 11, Fig. 24.). Die 4 Seitenecken dieses Oktaides läfst man durch die beiden übrigen Krystallräume (12 und 13) so abstumpfen, dafs sie sich in den Seitenkanten des Oktaides nur berühren. Die 4 vierkantigen Seitenecken des Oktaides sind dann abgestumpft, aber so, dafs die Abstumpfungsflächen 4 Parallelogramme geworden (§. 47. *Zusatz*). Da die Krystallflächen 12 mit 8 und 9, und die 13 mit 10 und 11 sechsseitige Säulen bilden, so können die 4 oberen Oktaidflächen ebenfalls nur Parallelogramme sein.

Zusatz. Dafs das Dodekaid im Gleichgewicht (z. B. Tab. V. Fig. 3. Tab. VI. Fig. 4.) 24 Kanten hat, folgt aus den 4 sechsseitigen Säulen ($4 \cdot 6 = 24$). Ausserdem hat es 6 vierkantige Ecken, von denen 2 die Endecken des Oktaides (8, 9, 10, 11) sind, vier andere in der Mitte der Seitenkanten desselben Oktaides liegen, und 8 dreikantige Ecken befinden sich in der Mitte der 8 Endkanten. Vermöge dieser dreikantigen Ecken kann man das Dodekaid auch als ein Hexaid ansehen, von dessen Kanten 6 durch eine sechsseitige Säule abgestumpft sind, so dafs das Hexaid wie eine sechsseitige Säule erscheint, welche mit 3 Hexaidflächen so endigt, dafs die Flächen den Kanten der Säule entsprechen (auf die Kanten der Säule aufgesetzt sind).

§. 56.

Das Dodekaid stumpft die Kanten des zugehörigen Oktaides und Hexaides ab, wie aus der Projektion dieser 3 Körper auf die Hexaidfläche am deutlichsten hervorgeht.

Projiciren wir nach §. 49. das Oktaid und Hexaid (1, 2, 3, 4, 5, 6) auf eine Hexaidfläche (7), und ziehen die Dodekaidsektionslinien (8, 9, 10, 11, 12, 13) nach dem §. 53. entwickelten Gesetze daran (Tab. II. Fig. 2), so wird

die Figur sehr übersichtlich. Wir sehen hier, daſs die Dodekaidflächen 8, 9, 10 und 11 die 4 Endkanten des Oktaides abstumpfen, denn sie liegen ja mit 2 Oktaidflächen 2 und 3, 1 und 4, 2 und 4, 1 und 3 in einer Zone. Eben so stumpft die Dodekaidfläche 13 die Oktaidseitenkante ab, weil sie mit 1 und 2, und Dodekaidfläche 12, weil sie mit 3 und 4 parallele Sektionslinien hat. Ferner fallen die Dodekaidflächen 12 und 13 mit den Hexaidflächen 5 und 6 in eine Zone; 8 und 9 mit 6 und 7, welch letztere die Projektionsebene bildet; ebenso 10 und 11 mit 5 und 7. Ja es wird in der Verbindung dieser drei Körper kein Zonensystem entwickelt sein, was nicht auf der Projektionsfigur geschrieben stände.

§. 57.

Das Dodekaid auf die Axen des Oktaides (Kanten des Hexaides) bezogen, hat den allgemeinen Ausdruck

$$\overline{\underline{a : c : \infty b}}.$$

Ein Blick auf die Figur (Tab. II. Fig. 2.) zeigt, daſs die Hexaidkanten $a \ldots a'$, $b \ldots b'$ und $c \ldots c'$, welche durch den Mittelpunkt der Projektion gezogen sind, vom Dodekaid unter keinem andern Ausdruck geschnitten werden, als obigem. So geht die Fläche 8...8 = $\overline{\underline{b' : c : \infty a}}$ (ihre Parallele also $\overline{\underline{b : c' : \infty a}}$), denn das Zeichen bedeutet ja nur, sie gehe der a parallel, schneide aber die beiden andern; 9...9 = $\overline{\underline{b : c : \infty a}}$ (die Parallele $\overline{\underline{b' : c : \infty a}}$); 10...10 = $\overline{\underline{a : c : \infty b}}$ (die Parallele $\overline{\underline{a' : c' : \infty b}}$); 11...11 = $\overline{\underline{a' : c : \infty b}}$ (die Parallele $\overline{\underline{a : c' : \infty b}}$). Die Flächen 12 und 13 könnten etwas Schwierigkeit machen. Wir sehen, daſs sie beide in der Axe $c \ldots c'$ liegen, d. h. denken wir die Flächen verrückt, so werden sie immer dieser Axe c parallel laufen, beide Flächen daher in Beziehung auf diese Axe das Zeichen ∞c erhalten. Anstatt der Axe $b \ldots b'$

denken wir uns z. B. die ihr parallele Sektionslinie 10...10, dann haben wir ein Axensystem $a...a'$ und 10...10, welches sich im Punkte a schneidet, aber von denen die eine $a...a'$ dieselbe, die zweite 10...10 eine der b parallele ist. Daher müssen die Flächen in Beziehung auf diese Axen vom Mittelpunkt a aus gerechnet denselben Ausdruck bekommen, als würden die Flächen auf die früheren Axen bezogen (§. 51.); für 12...12 ist ao geblieben, $am = ob' = b'$, d. h. wenn wir die Fläche verrücken, so erhalten wir 12...12 = $\overline{\underline{/a : b : \infty c/}}$ (oder ihre Parallele $\overline{\underline{/a' : b' : \infty c/}}$); für 13...13 ist ao auch geblieben, $an = bo = b$, daher 13...13 = $\overline{\underline{/a : b' : \infty c/}}$ (ihre Parallele $\overline{\underline{/a' : b : \infty c/}}$). Zu gleicher Zeit haben wir entwickelt, dafs in dem allgemeinen Ausdrucke $\overline{\underline{/a : c : \infty b/}}$ zwölf Flächen mit Hülfe der Striche unterschieden werden können. So oft wir daher im Allgemeinen von Dodekaidflächen reden, verstehen wir sie Alle unter obigen Zeichen, ausser wenn ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird.

Zusatz. Schon aus der Bezeichnung des Dodekaides folgt, dafs die Flächen desselben nur die Kanten des Hexaides und Oktaides abstumpfen können. Denn beim Hexaid können, wie wir sahen, je drei Axen, welche sich in einem Endpunkte schneiden, als das Axensystem des Oktaides, folglich auch als das unseres Dodekaides angesehen werden. Daher müssen die Dodekaidflächen stets 2 Hexaidkanten schneiden mit der dritten aber parallel gehen, und diefs gibt für die 12 Hexaidkanten richtig 12 Dodekaidflächen. Beim Oktaide ist diefs nicht so in die Augen springend. Allein da wir wissen, dafs die Oktaidkanten von Axe zu Axe verlaufen (§. 52), wie die Dodekaidflächen, so müssen die Dodekaidflächen wie die Oktaidkanten liegen.

§. 58

Die Hexaidflächen stumpfen die vierkantigen, die Oktaidflächen die dreikantigen Ecken des zugehörigen Dodekaides ab.

Wenn das Dodekaid die Kanten des Oktaides abstumpft, so müssen die Dodekaidflächen in den sechs Ecken des Oktaides zusammenstofsen, nur liegen die Dodekaidflächen wie die *Kanten*, und die Dodekaidkanten wie die *Flächen* des Oktaides, aber so, dafs sich die Dodekaidkanten über die Flächen des Oktaides erheben. Daher müssen nothwendig die vierkantigen Dodekaidecken durch die Oktaidaxen verbunden werden, mithin mufs auch die Hexaidfläche diese vierkantigen Dodekaidecken abstumpfen, die Hexaidfläche selbst, falls sie nur von Dodekaidflächen geschnitten wird, ein Parallelogramm bilden. Wir ersehen diefs auch unmittelbar aus der Projektionsfigur Tab. II. Fig. 2, wo die Projektionsfigur eine Hexaidfläche ist. Letztere schneidet die vier Dodekaidflächen (8, 9, 10, 11), welche in *c* eine vierkantige Ecke machen, unter einem Parallelogramm, wie die Sektionslinien der Dodekaidflächen zeigen. Daraus folgt das Gesagte. Was nun für die eine Ecke *c* gilt, gilt auch für die beiden andern Ecken *a* und *b*, denn wir dürfen nur die Körper auf die beiden andern Hexaidflächen projiciren, wo dieselben Figuren wieder herauskommen.

Das Oktaid stumpft die dreikantigen Dodekaidecken ab. Da die Dodekaidkanten sich in den Winkeln der Oktaidflächen über die Fläche erheben, so werden über jeder Oktaidfläche drei Dodekaidkanten sich zu einer dreikantigen Ecke verbinden, welche die bewegte Oktaidfläche abstumpfen mufs. Auch diese Erscheinung steht in der Projektionsfigur geschrieben. Drei Dodekaidflächen einer solchen dreikantigen Ecke z. B. 9, 10, 12 bilden nothwendig ein Hexaid, wie auch die 3 entsprechenden Sektionslinien dieser Flächen zeigen, die Oktaidfläche 4 schneidet aber diese Ecke, denn sie fällt in keinen der drei Zonenpunkte

9.10, 9.12 und 10.12. Wenn man nun die 3 Dodekaidflächen und die Oktaidfläche gehörig verrückt, wird man sich bald von der Wahrheit der Behauptung überzeugen, doch setzt diefs schon viele Anschauungskraft voraus.

§. 59.

Die allgemeine Projektionsfigur unserer drei zusammengehörigen Körper hat 4+3+6=13 *Sektionslinien, und* 6+3+4+12=25 *Zonenpunkte.*

Der Satz ergibt sich durch einen Blick auf die Fig. 1 Tab. II. unmittelbar. Wir haben 13 Sektionslinien die einer gleichen Zahl von Reduktionsebenen entsprechen. In den 6 Oktaidkanten, die unter sich durch die Anzahl der Sektionslinien gleichwerthig sind, schneiden sich 4 Sektionslinien, die einer 8seitigen Säule entsprechen, aus 2 Oktaid-, 1 Hexaid- und 1 Dodekaidfläche bestehend, und zwar folgen die Flächen so, dafs wenn wir mit der Hexaidfläche (7...7) beginnen, dann eine Oktaid-(4...4), eine Dodekaid-(12...12) und endlich eine Oktaidfläche (3...3) folgt, d. h. nehmen wir am Krystall (Tab. IV. Fig. 5) eine Hexaidfläche *(h)*, und gehen zu einer anliegenden Oktaidfläche *(o)*, so folgt dann in dieser Zone *(oh)* eine Dodekaid-*(d)* und zuletzt eine Oktaidfläche *(o)*, die sämmtlich in einer Zone liegen. Eine solche Zone heifst die *Kantenzone des Oktaides,* denn ihr mufs ja eine Oktaidkante *(o/o)* parallel gehen. In den 3 Kanten des Hexaides, die unter sich ebenfalls durch 4 Sektionslinien gleichwerthig sind, liegen 2 Hexaid- und 2 Dodekaidflächen, und zwar so, dafs der Dodekaidfläche (9) eine Hexaid-(7), ihr wieder eine Dodekaidfläche (8) folgt, bis die Hexaidfläche (6) die Reihe schliefst. Tragen wir diefs wieder auf den Krystall über, so heifst es: nehmen wir eine beliebige Dodekaidfläche *(d)* und gehen zu einer anliegenden Hexaidfläche *(h)* über, so liegt in dieser Zone noch eine Dodekaidfläche *(d)* und eine Hexaidfläche *(h)*. Eine solche Zone heifst die *Kantenzone des Hexaides.* In den vier Kanten des Dodekaides liegen

nur drei Dodekaidflächen, sie sind aber auch unter sich durch gleiche Sektionslinien gleichwerthig. Es folgt daraus, dafs wenn wir von irgend einer Dodekaidfläche *(d)* zu einer anliegenden gehen, in derselben Kante noch eine dritte Dodekaidfläche liegen müsse. Die Zone heifst die *Kantenzone des Dodekaides*. Endlich bleiben noch 12 zweilinige Zonenpunkte über, welche die Dodekaid- mit den Oktaidflächen bilden *(Diagonalzonen des Oktaides)*, doch fällt in diese Zone keine dritte Fläche.

Zusatz 1. Diese 3 Körper unter sich in ein Gleichgewicht bringen zu wollen, oder alle versteckten Kanten aufzusuchen, und was dergleichen Möglichkeiten mehr sind, ist ein ziemlich fruchtloses Unternehmen. Das Wichtigste aller Betrachtungen bleiben einzig und allein die Zonen.

Zusatz 2. Es bilden die 3 Körper gewisser Mafsen in sich ein Ganzes. Das Oktaid $\overline{\underline{/a : b : c/}}$, das alle drei Axen in der Einheit schneidet, bildet den Ausgangspunkt; es folgt das Hexaid $\overline{\underline{/a : \infty b : \infty c/}}$, welches nur eine Axe schneidet, und mit den andern beiden parallel geht. Den Schlufsstein macht das Dodekaid $\overline{\underline{/a : b : \infty c/}}$, zwei Axen schneidend und mit der dritten parallel gehend liegen seine Flächen sowohl in der Oktaid- als auch in der Hexaidkante. Alle folgenden Körper können die Axen nicht mehr in der Einheit, sondern nur unter irgend einem andern Zahlenverhältnifs schneiden. Den weitern Fortgang sehen wir schon in der Figur angedeutet. Denn nur die Oktaid- und Hexaidkantenzonen sind alle miteinander durch die Dodekaidflächen verbunden. Die Dodekaidkantenzonenpunkte können nun weiter mit denen des Oktaides noch verbunden werden, sowie auch die 12 Diagonalzonenpunkte des Oktaides mit den 12 übrigen, wodurch sich ein grofser Reichthum von neuen Körpern entwickeln wird.

§. 60.

Unsere drei Körper können mit Leichtigkeit auf jede beliebige Fläche projicirt werden, sobald nur das Oktaid projicirt ist.

Da bei unserer Projektion alle Flächen in einem gemeinsamen Punkte liegen, so müssen auch von diesem Punkte alle Kanten ausstrahlen, demnach zeigen alle Projektionsfiguren, in welcher Ebene sie auch liegen, dieselbe Anzahl Zonenpunkte, wenn nur die gleiche Anzahl von Flächen bleibt, und wenn wir die parallelen Sektionslinien als Durchschnitte im Unendlichen ansehen. Wir haben aber in §. 37. gezeigt, wie die Oktaidflächen auf jede beliebige Ebene projicirt werden können, und weiter gezeigt, wie aus den Kanten des Oktaides die Hexaid- und Dodekaidflächen durch Zonenconnexus abgeleitet werden können, so daſs die allgemeine Aufgabe nur immer darauf hinauskommt, die Projektion des Oktaides zuerst auszuführen. Nach diesem Princip haben wir uns Fig. 1. Tab. II. entwickelt.

§. 61.

Die Flächen unserer drei Körper sind nicht blos durch die Hexaidkanten, sondern durch jede beliebige Dreizonenaxen, freilich durch andere Ausdrücke, bestimmt.

Würden wir z. B. in Fig. 2. Tab. II. die Axe c bestehen lassen, anstatt b und a aber die Linien 13...13 und 12...12 als Axenrichtungen nehmen, so bekämen die vier Oktaidflächen (1, 2, 3, 4) den allgemeinen Ausdruck

$$\overline{\underline{/c : o\alpha : \infty o\beta/}};$$

und nehmen wir $o\alpha = \alpha$, $o\beta = \beta$, als Axeneinheiten, so verwandelt sich der Ausdruck in

$\overline{\underline{/c : \alpha : \infty\beta/}}$ ($\overline{\underline{/c : \alpha' : \infty\beta/}}$, $\overline{\underline{/c : \beta : \infty\alpha/}}$, $\overline{\underline{/c : \beta' : \infty\alpha/}}$ mit einschliefsend). Es fehlen nur noch 2 Flächen

$$\overline{\underline{/\beta : \alpha : \infty c/}} = 5...5, \text{ und } \overline{\underline{/\beta : \alpha' : \infty c/}} = 6...6,$$

denn diese beiden Hexaidflächen 5 und 6 verhalten sich offenbar gegen ihre Axen α und β eben so, wie sich die Dodekaidflächen 12 und 13 gegen a und b verhielten. Nur die zur Projektionsebene gewordene Hexaidfläche 7 behält ihren analogen Ausdruck $\overline{/c:\infty\alpha:\infty\beta/}$ bei; zu ihr kommen jetzt die Dodekaidflächen 12...12$=\overline{/\beta:\infty\alpha:\infty c/}$ und 13...13$=\overline{/\alpha:\infty\beta:\infty c/}$ als neue Hexaidebenen hinzu, denn die Zonenaxen dieser drei Ebenen haben uns die neuen Axen geliefert. Endlich bekommen die noch übrigen 4 Flächen 8, 9, 10, 11 das Zeichen $\overline{/c:2\alpha:2\beta/}$, welches Zeichen man auch mit zwei dividiren kann, da die Axenlängen nur ein relatives Verhältniſs andeuten, wodurch sich dann $\overline{/\tfrac{1}{2}c:\alpha:\beta/}$ ergibt.

Wir sind durch die Wahl der neuen Axen auf eine neue etwas complicirtere Flächenbezeichnung gekommen. Der einfache Axenzusammenhang, welcher §. 59 *Zusatz* 2 angedeutet wurde, ist hier zerrissen. Wenn es sich daher um die Wahl der einfachsten Axen handelt, so müssen wir den erstern unmittelbar den Vorzug einräumen.

Ausserdem lassen sich aber unsern drei Körpern noch ganz andere Axen unterlegen. Wir könnten z. B. $xn=\gamma$, und auf 10...10 $na=\alpha$, auf 9...9 $nb=\beta$ setzen. Die Projektionsebene würde immer ihren alten Ausdruck behalten, 9 und 10 würden aber jetzt den Ausdruck der Hexaidfläche annehmen. Die übrigen Flächen erhielten zwar etwas complicirtere Ausdrücke, doch immer solche, daſs ihre Axenausdrücke ein Multiplum oder Submultiplum der Einheiten γ, α und β blieben. Nun kann man aber ferner die drei Körper auf jede beliebige ihrer Flächen projiciren, und aus jeder dieser besondern Projektionen neue Axenkreuze wählen, doch wird man niemals einen andern als einen rationalen Axenausdruck bekommen. Man sagt daher, *nicht nur die Axen, sondern auch die Kanten der*

Krystalle, werden von den Krystallflächen unter rationalem Verhältnisse geschnitten, indem man unter Axen nur ein einziges Axenkreuz denkt. Aus der Art unserer Betrachtungen geht hervor, dafs dieser Satz keines Beweises bedarf, sondern sich von selbst verstehe. Denn wir haben zu unsern Axen nichts als drei Krystallkanten gewählt, was daher für die einen gilt, mufs auch für die andern gelten.

Zusatz. Demnach sind die Axen eines Krystalls nur beliebige zu Grunde gelegte Richtungen, von denen mathematisch genommen keine vor der andern einen Vorzug hat, jede Krystallverbindung hat unendlich viele solcher Richtungen. Krystallographisch genommen geben wir jedoch denjenigen den Vorzug, durch welche den Flächen der einfachste Zahlenausdruck gegeben wird. Daher sind die ersten Axen a, b und c, welche den Körpern den Ausdruck

$$\overline{|a : \infty b : \infty c|}, \quad \overline{|a : b : \infty c|} \text{ und } \overline{|a : b : c|}$$

geben, die besten, weil ausser ihnen kein einfacherer Ausdruck denkbar ist. Sodann folgen die Axen c, α und β, wodurch den Flächen der drei Körper die Ausdrücke

$$\overline{|\alpha : \infty \beta : \infty c|}, \quad \overline{|\alpha : \beta : \infty c|} \text{ und } \overline{|\alpha : \beta : \tfrac{1}{2} c|}$$

geworden sind, weil sie die nächsten einfachen sind. Wenn jene die *Oktaedrischen*, so heifsen diese die *Säulenaxen,* wie wir jetzt entwickeln wollen.

§. 62.

Projiciren wir das Oktaid auf eine seiner Dodekaidflächen, so bildet die durch den Mittelpunkt der Projektion gehende Dodekaid- und Hexaidfläche mit der Projektionsebene diejenigen Kanten, in welchen die einfachsten Axen liegen (Tab. IV. Fig. 6 und 7.).

Nehmen wir ein Oktaid zur Hand (Tab. IV. Fig. 7), dessen eines Paar von sich in einem Eckpunkte gegenüberliegenden Krystallräumen mit 1, 3, und dessen anderes mit 2, 4, bezeichnet ist, und stellen die Räume 1 und 2 als vier-

seitige Säule aufrecht, so werden 3 und 4 diese Säule so schneiden, dafs sie vorn alle 4 eine gemeinsame vierkantige Ecke (1, 2, 3, 4) bilden. Die Dodekaidfläche, welche die Kante zwischen 3 und 4 abstumpft, soll die Projektionsebene werden, dann mufs die Säule 1, 2 (Fig. 7) diese Projektionsebene unter dem ihr entsprechenden Kreuz 1, 2 (Fig. 6) schneiden. Die beiden andern Ebenen 3 und 4 werden dieses Kreuz so schneiden müssen, dafs in Fig. 6 $op' = op$ und $oq' = oq$ wird. Denn denken wir uns die Dodekaidfläche (die Projektionsebene) in die Axe pq (Fig. 7) gelegt, mit welcher sie als Dodekaidfläche parallel gehen mufs, so wird die Fläche 3 die Dodekaidfläche in qp' parallel Kante 3/4 schneiden, weil die Dodekaidfläche in der Kante 3/4 liegt (d. h. sie abstumpft). Die Hexaidfläche, welche in den Kanten 3/4 und 1/2 liegt, halbirt auch die Axe pq, und ihr Schnitt oo' mit der Dodekaidfläche geht der $p'q$ parallel, also mufs sich verhalten: $qo' : o'p = p'o : op$, d. h. pp' ist in o halbirt. Aus gleichen Gründen wird qq' (Fig. 6) in o halbirt, wie schon aus der Projektion folgt. Daher bilden die Sektionslinien 1, 2, 3, 4 Fig. 6 das Projektionsbild der gleichnamigen Ebenen des Oktaides Fig. 7, worin sich alle Bezeichnungen genau entsprechen, so dafs Zonenpunkt 1 . 4 die Kante des Oktaides 1/4 etc. ... bezeichnet. Verbinden wir die Zonenpunkte 1 . 4 mit 2 . 3 und 2 . 4 mit 1 . 3, so bekommen wir die in diesen Zonen liegenden Hexaidflächen 5 und 6; und legen wir dann durch den Mittelpunkt o die Dodekaidfläche 13...13, welche in der Hexaidkante 5/6 und der Oktaidkante 1/2 liegt; ferner die Hexaidfläche 7...7, in den Oktaidkanten 3/4 und 1/2 liegend, so bilden die beiden Flächen 7 und 13 mit der Projektionsebene dasjenige Axenkreuz, in welchem die einfachsten Ausdrücke für die drei Körper liegen. Nennen wir die vordere Axe wieder a, die seitliche b, und die aufrechte c (aber wohl bedenkend, dafs wir jetzt ganz andere a, b und c als in den vorigen Abschnitten meinen), so erhalten wir dieselben nächst einfa-

chen Ausdrücke, welche wir §. 61 *Zusatz* aufgestellt haben. Ein Blick auf unsere Figur, und auf die auf Tab. II. Fig. 3 ausgeführte lehrt dieses. Denn es haben die Oktaidflächen (1, 2, 3 und 4) mit den beiden Hexaidflächen (5 und 6) den allgemeinen Ausdruck $\overline{\underline{/a : b : \infty c/}}$. Die Flächen 7 und 13, welche mit der Dodekaidfläche 12 das Axenkreuz bilden, erhalten den allgemeinen Ausdruck $\overline{\underline{/a : \infty b : \infty c/}}$, endlich die vier übrigen Dodekaidflächen 8, 9, 10 und 11 das Zeichen.

$$\overline{\underline{/c : 2a : 2b/}} = \overline{\underline{/\tfrac{1}{2}c : a : b/}}.$$

Zusatz 1. Dem Anfänger macht die Projektion des Oktaides in der Säulenstellung in der Regel etwas Schwierigkeit. Stellen wir ein Oktaid nach einer seiner sechs vierseitigen Säulen aufrecht, so bildet die Kante der aufrechtstehenden Säule (1/2) den Mittelpunkt der Konstruktion. Die obere Horizontalkante (3/4) schneidet die Projektionsebene nicht, wenn die Dodekaidfläche in dieser Kante zur Projektionsebene gewählt wird, weil die Kante der Dodekaidfläche parallel geht. Stellen wir nun das Oktaid gegen die Projektionsfigur so, dafs die vordern schief gehenden Kanten (1/4 und 2/3) in die hintern Zonenpunkte 1.4 und 2.3 fallen, so müssen statt der hintern schief laufenden offenbaren Kanten (2/4 und 1/3) die vordern versteckten auftreten, die nach den ihnen entsprechenden Punkten 1.3 und 2.4 gehen. Gerade das Letztere bildet die Schwierigkeit.

Zusatz 2. Man kann die Säulenaxen des Oktaides auf eine ganz einfache Weise entwickeln (wie sie auch in Fig. 2. Tab. II. stehen). Stellen wir ein Oktaid nach der Axe c aufrecht, so liegen die beiden andern Axen a und b in der Ebene der Seitenkanten des Oktaides. Die 3 Axen schneiden das Parallelogramm der Seitenkanten im Mittelpunkte, weil die Axe a und b die Diagonalen des Parallelogrammes sind. Denke ich mir nun statt der Diagonalen

2 Linien den Seiten des Parallelogrammes parallel und zwar durch den Mittelpunkt gezogen, so müssen sich diese neuen Linien α und β ebenfalls mit der Axe c im Mittelpunkte halbiren, sie sind also Axen des Oktaides; sie bleiben aber auch dieselben Axen des Oktaides, wenn ich das Oktaid nach diesem Parallelogramme aufrecht stelle, die Flächen auf die Axenebene $c\alpha$ projicire, wo dann β aufrecht steht.

§. 63.

Projiciren wir das Oktaid auf eine seiner Flächen, so bilden drei durch den Mittelpunkt der Projektion gehende Dodekaidflächen mit der Projektionsebene einen Vierzonenkörper, gegen welchen sämmtliche Flächen symmetrisch liegen. Daher bilden auch die Kanten desselben ein passendes Axensystem.

Wir haben §. 39. gezeigt, dafs das Oktaid auf eine seiner Flächen durch ein einfaches Dreieck projicirt ist. Es liegen dann drei Zonenpunkte (1.2, 1.3, 2.3) in der Projektionsebene Tab. II. Fig. 4., die andern drei Zonenpunkte liegen im Unendlichen, wo die durch x den 1...1, 2...2 und 3.3 respective parallel gehenden Linien die Projektionsebene treffen. Die drei Hexaidflächen 5, 6 und 7 gehen daher durch die Zonenpunkte 2.3, 1.3 und 1.2, den Sektionslinien 1...1, 2...2 und 3...3 parallel. Da alle Flächen durch den gemeinsamen äussern Punkt gehen, so wollen wir $ox = c$ nennen; die Entfernungen des Punktes o von den Endpunkten des Oktaiddreiecks $\alpha\beta\delta$ wollen wir ($o\alpha = \alpha$, $o\beta = \beta$, $o\delta = \delta$) als die Axeneinheiten nehmen. Unter dieser Voraussetzung bekommen die Oktaidflächen 1, 2 und 3 den allgemeinen Ausdruck

$$/c : \alpha : \tfrac{1}{2}\delta : \beta/.$$

Denn die Sektionslinie 2...2 schneidet α und β in der Einheit, δ aber in den Hälften, weil die drei Axen der Projektionsebene im Dreiecke $\alpha\beta\delta$ von den Ecken aus nach den Hälften der gegenüberstehenden Seiten gezogen sind.

Die Dreiecksseiten sind durch die sie schneidenden Axen halbirt, weil Seiten- und Axenrichtungen Diagonalen der drei Parallelogramme $\alpha(5.7)\beta\delta$, $\alpha(6.7)\delta\beta$ und $\alpha\delta(5.6)\beta$ bilden. Unter jenem allgemeinen Ausdrucke verstehen wir aber die drei Flächen

$$1 = /c:\alpha:\tfrac{1}{2}\beta:\delta/ \quad 2 = /c:\alpha:\tfrac{1}{2}\delta:\beta/ \quad 3 = /c:\beta:\tfrac{1}{2}\alpha:\delta/,$$

eine andere Fläche soll im Zeichen nicht begriffen sein, da in diesen 3 Zeichen das $\frac{1}{2}$ zu jeder Axe getreten ist. Die drei Hexaidflächen 5, 6 und 7 bekommen das allgemeine Zeichen

$$/c:2\alpha:\beta:2\delta/, \text{ d. h.}$$

$$5 = /c:2\alpha:\beta:2\delta/ \quad 6 = /c:2\alpha:\delta:2\beta/ \quad 7 = /c:2\delta:\alpha:2\beta/.$$

Es folgt dies Zeichen ebenfalls aus obigen 3 Parallelogrammen. Die drei Dodekaidflächen des Mittelpunktes (8, 11, 13) liegen in c und in einer Axe der Projektionsebene, schneiden aber die andern beiden in der Gleichheit, denn wir dürfen z. B. 11 nur aus dem Mittelpunkte in den Punkt β bewegen, so mufs sie auch α unter der Einheit schneiden. Daher erhalten diese 3 Flächen das allgemeine Zeichen

$$/\alpha:\beta:\infty\delta:\infty c/, \text{ d. h.}$$

$$8 = /\alpha:\delta:\infty\beta:\infty c/ \quad 11 = /\alpha:\beta:\infty\delta:\infty c/ \quad 13 = /\beta:\delta:\infty\alpha:\infty c/.$$

Die drei übrigen Dodekaidflächen 9, 10 und 12 bekommen das allgemeine Zeichen

$$/c:4\alpha:2\delta:4\beta/, \text{ d. h.}$$

$$9 = /c:4\alpha:2\beta:4\delta/ \quad 10 = /c:4\alpha:2\delta:4\beta/ \quad 12 = /c:4\beta:2\alpha:4\delta/.$$

Die Projektionsebene 4 bekommt endlich das Zeichen

$$/c:\infty\alpha:\infty\beta:\infty\delta/.$$

Wir könnten diese Axenstellung für die drei Körper *die Säulenstellung des Dodekaides* oder die *Hexaidische* nennen, weil die Projektion des Oktaides in dieser Stellung der Projektion des Hexaides gleicht; bezeichnender ist aber die: *vieraxige Stellung.*

Zusatz. **Da die Bezeichnung der Flächen sich nicht eben durch Einfachheit auszeichnet, so könnte man freilich sich in der Projektionsebene für α, β und δ drei andere** Richtungen $\alpha'...\alpha'$, $\beta'...\beta'$ und $\delta'...\delta'$ ziehen, auf welche bezogen die Flächen noch einfachere Ausdrücke bekämen. Die Richtungen gehen ebenfalls durch o, aber den Sektionslinien 1...1, 2...2 und 3...3 respektive parallel. Die neuen Axen werden alsdann durch jene drei Sektionslinien in Mittelpunkte o halbirt, so dafs, $o\alpha' = \alpha'$, $o\beta' = \beta'$ und $o\delta' = \delta'$ gesetzt, der allgemeine Ausdruck

$$\overline{\underline{/c:\alpha:\tfrac{1}{2}\beta:\delta/}} \quad = \quad \overline{\underline{/c:\infty\alpha':\beta':\delta'/}}$$

$$\overline{\underline{/c:2\alpha:\beta:2\delta/}} \quad = \quad \overline{\underline{/c:\infty\alpha':2\beta':2\delta'/}}$$

$$\overline{\underline{/\infty c:\alpha:\beta:\infty\delta/}} \quad = \quad \overline{\underline{/\infty c:\alpha':\tfrac{1}{2}\beta':\delta'/}}$$

$$\overline{\underline{/c:4\alpha:2\beta:4\delta/}} \quad = \quad \overline{\underline{/c:\infty\alpha':4\beta':4\delta'/}}$$

wird, während die Projektionsebene ihren Ausdruck beibehält. Da jedoch die Flächen dieser neuen Sektionslinien erst in den folgenden Abschnitten entwickelt werden, so haben wir sie hier nur vorläufig erwähnt. Der Einfachheit wegen werden die letztern gemeiniglich den erstern vorgezogen, sie verhalten sich gegenseitig analog, wie sich die ersten beiden 3axigen Systeme gegen einander verhielten. Die Gruppirung zu drei ist eben so bezeichnend, als die Vieraxigkeit. Es versteht sich, dafs wir hier wieder je andere 4 Axen herausgreifen und sämmtliche Flächen darauf beziehen könnten, gerade wie wir diefs §. 61 von 3 Axen gelehrt haben.

Recapitulatio II.

Auch hier müssen wir dem Leser nochmals den folgerechten Gang lebendig vorführen.

1) Das Oktaid unterscheidet sich vom Hexaide und Vier-

zonenkörper wesentlich dadurch, daſs noch nicht alle 6 Zonenpunkte unter sich verbunden waren, daher trat zum ersten Male das Deduktionshexaid auf.

2) Durch das Deduktionshexaid war nun zwar die Verbindung aller Oktaidkantenzonen geschlossen, allein die Hexaidkantenzonen konnten noch mit einigen Oktaidkantenzonen verbunden werden; dieſs gab uns das Dodekaid.

3) Durch das Dodekaid sind die 6 Kantenzonen des Oktaides und die 3 des Hexaides zwar verbunden, aber die Kantenzonen des Dodekaides lassen noch eine Verbindung mit den Oktaidkanten zu, was uns den Fortschritt im folgenden Abschnitte zur Hand gibt.

Nicht weniger spricht sich die strenge Folge in den verschiedenen Projektionsarten des Oktaides aus, woraus die verschiedenen Axen folgten.

1) Die erste Bestimmtheit der allgemeinen Projektion des Oktaides fand auf einer Fläche Statt, die in *zwei Kanten* des Oktaides lag, auf der *Hexaidfläche*, und wodurch uns zugleich die einfachsten Axen gegeben waren.

2) Die folgende Projektion fand auf einer Fläche Statt, die nur in *einer Kante* lag, auf der *Dodekaidfläche*, dieſs gab uns die nächst einfachsten Axen.

3) Konnte weiter kein Fall übrig bleiben, als die Projektion auf eine Fläche, die in *drei Oktaidkanten* lag; dieſs muſste aber die Oktaidfläche selbst sein, wodurch uns ein 4axiges System zuerst bekannt wurde.

Da hiermit die drei verschiedenen Flächen der drei Körper erschöpft sind, so ist auch keine andere besondere Projektion, mithin auch keine andere einfache Axenlegung vorhanden.

Ein besonderes Gewicht möchte ich auch auf die gegenseitigen Funktionen der entwickelten Körper im Systeme legen.

1) Sind die Säulen das allgemeine Substrat, aus dem die Krystalle zusammengesetzt sind, und die alle ihren letzten Grund in der Richtung finden.

2) Sodann folgt das Hexaid und der Vierzonenkörper, denen zwar Säulen zu Grunde liegen, die aber selbstständig kein Axenkreuz führen können, weil für beide kein Punkt des Gleichgewichts vorhanden war. Sie sind daher die Körper, welche das Axenkreuz selbst repräsentiren.

3) Diesen Repräsentanten der Axenkreuze folgen dann die Körper, denen sie deduktionsweise zu Grunde gelegt werden. Dem Oktaide in seinen besondern Projektionen auf die aus ihm deducirten Hexaid- und Dodekaidflächen lag das Axenkreuz der Hexaidkanten als naturgemäfs zu Grunde, während demselben Oktaide in der Projektion auf seine eigene Flächen nur die Kanten des Vierzonenkörpers als Axen pafsten.

Durch diesen Entwicklungsgang ist die Nothwendigkeit der drei und vieraxigen Systeme dargethan, und zu gleicher Zeit ein tieferer Blick in alle nur möglicher Weise auftretenden Krystallverhältnisse eröffnet.

---

§. 64.

Durch die Verbindung der Dodekaid- mit den Oktaidkanten entsteht das Icositetraid (24flächner)

$$\overline{\underline{/a : b : \tfrac{1}{2}c/}} = l.$$

Aus Tab. II. Fig. 1—4 ersehen wir, dafs die Dodekaidzonenpunkte mit den Hexaidzonenpunkten bereits verbunden sind, also nur noch mit den Oktaidkantenzonenpunkten verbunden werden können. Da in jeder Dodekaidkantenzone drei Dodekaidflächen liegen, und jede dieser letztern in einer Oktaidkantenzone bereits liegt, so kann jeder Dodekaidkantenzonenpunkt nur noch mit drei

Oktaidkantenzonenpunkten verbunden werden. Diefs gibt also 4 . 3 = 12 neue Flächen, die gleiche Zonenpunkte verbinden, sich daher gegen alles Vorhandene symmetrisch verhalten müssen. In Tab. I. sind die Flächen mit l bezeichnet (während die Sektionslinien der Hexaidflächen mit a und b; der Oktaidflächen mit o; der Dodekaidflächen mit d bezeichnet stehen). Dafs das obige Zeichen $\overline{\underline{/a : b : \frac{1}{2}c/}}$ das richtige sei, ergibt sich aus dem unmittelbaren Anblicke der Figur, wenn man nur immer erwägt, dafs die Axenlängen relativ sind, also dafs mit einer allen drei Gliedern gemeinschaftlichen Zahl dividirt werden darf. Schon im Zeichen liegt, was aus der Figur unmittelbar hervorspringt, dafs damit 24 Flächen bezeichnet sind, wenn man die Striche zu Hülfe nimmt. Denn im vordern rechten Quadranten liegen die drei

$$\overline{\underline{/a : b : \tfrac{1}{2}c/}}, \quad \overline{\underline{/a : \tfrac{1}{2}b : c/}} \text{ und } \overline{\underline{/\tfrac{1}{2}a : b : c/}},$$

folglich gibt das in den acht Oktanten 3 . 8 = 24 Flächen. Von den besondern Eigenschaften dieses Körpers ist weiter nichts festzuhalten, als dafs derselbe in die Kantenzone des Dodekaids fällt, folglich dessen Kanten abstumpft. Man sieht diefs unmittelbar aus der Lage der l gegen die d, denn zwischen zweien der d liegt ein l, d. h. die l stumpft die Säule der d ab. Gegen die Oktaidflächen (o) verhalten die l sich anders, denn es liegen zwischen zweien der o auch zwei l, d. h. die Oktaidflächen würden durch die daselbst entstehende Kante des Icosatetraides zugeschärft werden. Die weiteren Entwickelungen solcher Verhältnisse folgen unten in der Systematik.

Zusatz. Man zählt alle Flächenausdrücke zu den Icositetraiden, deren dritte Axe eine Verhältnifszahl bekommt, die kleiner ist als 1; ist sie gröfser als 1, so zählt man die Flächen zu den Tetrakisoktaiden, Ausdrücke, die in der Systematik erklärt werden.

§. 65.

Durch die Verbindung der Oktaiddiagonalzonen mit den Oktaidkantenzonen entsteht ein zweites Icositetraid

$$\overline{/ a : b : \tfrac{1}{3} c /} = \lambda.$$

Durch die Flächen l ist die Verbindung sämmtlicher Kantenzonenpunkte der drei Körper vollendet. Es müssen daher die 12 Diagonalzonenpunkte des Oktaides folgen. Da diese Punkte durch einen Schnitt der Oktaid- mit der Dodekaidfläche entstehen, die Oktaidfläche aber in dreien Kantenzonen ihres Oktaides liegt, die Dodekaidfläche in einer 4ten, so ist jeder der 12 Punkte bereits durch die Oktaid- und Dodekaidfläche mit vier Oktaidkantenzonenpunkten verbunden. Es können daher nur noch 2 Kantenzonenpunkte des Oktaides mit jenen 12 Punkten verbunden werden, diefs würde 2.12 = 24 Sektionslinien geben. Allein wenn wir diese Linien ziehen wollen, so findet sich, dafs stets zwei der 12 Punkte in eine solche Sektionslinie λ fallen müssen. Daher hat der Körper nur 12 Sektionslinien, d. h. 24 Flächen, wie der Ausdruck beweist.

§. 66.

Durch die Verbindung der Oktaiddiagonalzonen mit den Hexaidkantenzonen entsteht ein Tetrakishexaid (4 mal 6 flächner)

$$\overline{/a : \tfrac{1}{2} b : \infty c/} = \pi.$$

Wie wir die 12 Diagonalzonen des Oktaides mit den Oktaidkantenzonen verbanden, so müssen wir sie auch jetzt mit den Hexaidkantenzonen verbinden. Sobald wir aber eine solche Linie π ziehen wollen, findet sich, dafs darin immer 2 der zwölf Diagonalzonenpunkte zugleich liegen, daher bekämen wir im Allgemeinen 3.6 = 18 Sektionslinien. Von diesen sind aber schon 6 vorhanden, die dem Dodekaid gehören, also bleiben 12 für unser Tetrakishexaid über. Auch diese Anzahl liegt im allgemeinen Zeichen. Während nämlich c das Zeichen ∞ bekommt, können wir

$$/a:\tfrac{1}{2}b/,\quad /a:\tfrac{1}{2}b'/,\quad /b:\tfrac{1}{2}a/ \text{ und } /b'\ \tfrac{1}{2}a/$$

schreiben, und wenn wir die Parallelen dazu rechnen, so bekommen wir 8 verschiedene Flächen. Dasselbe Zeichen π kann nun aber auch an b und a treten, so dafs wir $3.8=24$ Flächen bekommen (die parallelen mit gezählt). Dafs diese Flächen in der Kantenzone des Hexaides liegen, also die Kante des Hexaides zuschärfen, weil an jede Kante zwei treten müssen, wird aus der Figur klar.

§. 67.

Durch die Verbindung der Oktaiddiagonalzonen mit den Dodekaidkantenzonen entsteht ein Hexakisoktaid (6 mal 8 flächner)

$$/a:\tfrac{1}{2}b\ \tfrac{1}{3}c/ = g.$$

Sechs der 12 Oktaiddiagonalzonen sind bereits durch die Dodekaidflächen mit den Dodekaidkantenzonen verbunden. Es bleiben demnach nur noch 6 für jede der 4 Dodekaidkantenzonen zur Verbindung übrig, woraus also $6.4=24$ Sektionslinien entspringen. Sie liegen in der Kantenzone des Dodekaids, und zwar 6 in jeder, daher müssen sie die Dodekaidkanten zuschärfen. Auch im Zeichen liegt ein 48flächiger Körper. Betrachten wir nur die Möglichkeit von Flächen in einem Oktanten, so findet sich, dafs wir das Zeichen auf folgende 6 Arten schreiben können:

$$/a:\tfrac{1}{2}b:\tfrac{1}{3}c/,\quad /a:\tfrac{1}{3}b:\tfrac{1}{2}c/,\quad /b:\tfrac{1}{2}a:\tfrac{1}{3}c/,$$

$$/b:\tfrac{1}{3}a:\tfrac{1}{2}c/,\quad /c:\tfrac{1}{2}a:\tfrac{1}{3}b/,\quad /c:\tfrac{1}{3}a:\tfrac{1}{2}b/.$$

Wenn wir nun diese Zeichen mit den gehörigen Strichen versehen, so bekommen wir in den 8 Oktanten $6.8=48$ Flächen.

§. 68.

Durch die Verbindung der Oktaiddiagonalzonen unter sich entsteht das Hexakisoktaid

$$/a:\tfrac{1}{3}b:\tfrac{1}{4}c/ = \gamma.$$

Da jeder der 12 Punkte mit den übrigen 11 Punkten

verbunden werden kann, so bekämen wir $\frac{11.12}{2}=66$ Sektionslinien. Allein durch o, d, λ und π ist bereits jeder einzelne Punkt mit 7 Punkten verbunden, daher müssen wir $\frac{12.7}{2}=42$ Linien abziehen, bleiben $66-42=24$ Linien, welche durch die Verbindung jedes der 12 Punkte mit den 4 noch nicht verbundenen entstehen. Wie das aus der Figur unmittelbar hervorleuchtet.

Zusatz 1. Durch dieses letzte Hexakisoktaid sind alle Zonenpunkte, welche die drei Körper unter sich bildeten, mit einander verbunden. Es sind uns dadurch zwei Körper mit dem Zeichen

$$\overline{\underline{/a:b:\frac{1}{m}c/}} \quad \text{(wo } m=2 \text{ und } m=3\text{);}$$

einer mit dem Zeichen

$$\overline{\underline{/a:\frac{1}{m}b:\infty c/}} \quad \text{(wo } m=2\text{),}$$

und zwei mit dem Zeichen

$$\overline{\underline{/a:\frac{1}{m}b:\frac{1}{n}c/}} \quad \text{(wo } m=2 \text{ oder } 3, \text{ und } n=3 \text{ oder } 5\text{)}$$

geworden. Zu gleicher Zeit sehen wir ein, daſs

$$\overline{\underline{/a:\frac{1}{m}b:\frac{1}{n}c/}}$$

das allgemeinste Zeichen ist, in dem alle andern als besondere stecken, sofern nur m und n jede ganze Zahl bedeuten, die gröſser oder kleiner als 1 ist. Denn das Zeichen

$$\overline{\underline{/\frac{1}{p}a:\frac{1}{m}b:\frac{1}{n}c/}}$$

ist nicht allgemeiner als jenes, da bei der relativen Gröſse der Axen mit p der Ausdruck multiplicirt werden darf, ohne daſs das Zeichen einen anderen Werth bekäme. Setzen wir daher im allgemeinen Zeichen $m=1$, so ver-

wandelt es sich in $\overline{\underline{/a : b : \frac{1}{n} c /}}$; ist $m = 0$ in

$$\overline{\underline{/a : \frac{1}{o} b : \frac{1}{n} c /}} = \overline{\underline{/a : \infty b : \frac{1}{n} c /}}$$; ist $m = 0$,

$n = 1$ in $\overline{\underline{/a : \infty b : c/}}$; ist $m = n = 1$ in $\overline{\underline{/a : b : c/}}$;

ist $m = n = 0$ in $\overline{\underline{/a : \infty b : \infty c/}}$.

Wollten wir dennoch weitere Körper deduciren, so würden wir den nächstfolgenden Körper, also das Icositetraid, zu Hülfe nehmen müssen, wodurch uns eine neue Reihe von 24 und 48flächigen Körpern entstehen würde.

Zusatz 2. Da wir alle Flächen durch die Einheit der Axe c gelegt haben, so haben wir nur zu bestimmen, unter welchen Verhältnissen die Sektionslinien die Axen a und b schneiden. Diese Verhältnisse hängen aber von den Zonenpunkten ab, so daſs, wenn die Lage der Zonenpunkte gegen die Axen bekannt ist, daraus leicht folgt, wie die Axen von denjenigen Sektionslinien geschnitten werden, die in diesen Zonenpunkten liegen.

§. 69.

Die Lage eines Zonenpunktes p (Tab. IV. Fig. 8.) gegen die Axen a und b ist uns durch das Parallelogramm pqor bestimmt, wo die Seiten pr und pq den Axen parallel gehen.

Es ist dieſs die gewöhnliche in der Mathematik eingeführte Bezeichnung. Nennen wir $oq = \frac{a}{m}$, $or = \frac{b}{n}$, so ist $pr = oq = \frac{a}{m}$, und $pq = or = \frac{b}{n}$; wir bezeichnen daher den Punkt $p = (\frac{a}{m} + \frac{b}{n})$. Dieses Zeichen gilt allgemein, weil man jedem Bruche $\frac{r}{m}$ die Form $(\frac{1}{\frac{m}{r}})$

geben kann. Denn hätten wir z. B. eine Fläche

$$\overline{/\tfrac{2}{3}a : \tfrac{3}{5}b : c/}\text{, so wäre diese} = \overline{/(\tfrac{1}{\frac{3}{2}})a : (\tfrac{1}{\frac{5}{3}})b : c./}$$

§. 70.

Sind mir zwei Zonenpunkte $(\frac{a}{m}+\frac{b}{n})$ *und* $(\frac{a}{m'}+\frac{b}{n'})$ *(Tab. III. Fig. 9.) gegeben, so erhält die Sektionslinie, welche in beiden Punkten liegt, das Zeichen*

$$\frac{n\,m' - n'\,m}{m\,m'\,(n-n')}\,a : \frac{n\,m' - n'\,m}{n\,n'\,(m'-m)}\,b.$$

Die Zonenpunkte $(\frac{a}{m}+\frac{b}{n})$ und $(\frac{a}{m'}+\frac{b}{n'})$ sind gegeben; der Ausdruck der Sektionslinie $\overline{/\frac{a}{p} : \frac{b}{q}/}$ soll gefunden werden. Es verhält sich

$$\frac{a}{p} : \frac{a}{m} = \frac{b}{q} : \frac{b}{q} - \frac{b}{n} \quad \text{d. h.} \quad \frac{m}{p} = \frac{n}{n-q}$$

$$\frac{a}{p} : \frac{a}{m'} = \frac{b}{q} : \frac{b}{q} - \frac{b}{n'} \quad \text{d. h.} \quad \frac{m'}{p} = \frac{n'}{n'-q};$$

folglich

$$\frac{1}{p} = \frac{n}{m(n-q)} = \frac{n'}{m'(n'-q)}$$

$$m'n'n - m'n\,q = m\,n\,n' - m\,n'\,q$$

$$n\,n'\,(m'-m) = q\cdot(m'\,n - m\,n')$$

$$\frac{n\,n'\,(m'-m)}{m'\,n - m\,n'} = q;$$

substituiren wir den Werth von q in $\frac{m}{p} = \frac{n}{n-q}$,

so kommt

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{n - \frac{nn'(m'-m)}{m'n - mn'}} = \frac{m'n - mn'}{m'n - mn' - n'(m'-m)}$$

$$= \frac{m'n - mn'}{m'n - mn' - n'm' + n'm} = \frac{m'n - mn'}{m'n - n'm'}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{m'n - mn'}{mm'(n-n')}, \text{ folglich}$$

$$\frac{a}{p} = \frac{m'n - mn'}{mm'(n-n')} a, \quad \frac{b}{q} = \frac{m'n - mn'}{nn'(m'-m)} b.$$

(cf. WEISS Theorie des Feldspathsystems. Abh. der Berl. Acad. der Wiss. 1820 und 1821.)

Zusatz. Einfacher ergibt sich der Satz durch Coordinatentheorie. Da wir jedoch nicht bei allen unsern Lesern die Kenntnifs derselben voraussetzen dürfen, so werden wir stets die Beweise durch Coordinaten nur in Anmerkungen hinzufügen.

Es sei Tab. IV. Fig. 10. *ein Zonenpunkt A durch $x'y'$, B durch $x''y''$ gegeben, man soll jeden beliebigen Punkt xy der durch A und B gehenden Sektionslinie finden.*

Es müssen in der Figur die Gleichungen Statt haben

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y - y''}{x - x''} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},$$

denn es sind die Quotienten der kleinen zwei Dreiecke mit der gestrichelten Basis, und da aus je zweien der dritte Quotient durch Subtraktion folgt, so mufs die Gleichsetzung zweier Quotienten uns die Gleichung der Linie geben, also

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}, \quad \text{oder}$$

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

Für den Durchschnitt a der Sektionslinie AB mit der Axe der X ist $x = o$, und den b mit der Y ist $y = o$, also dürfen wir nur in der Gleichung diese Werthe setzen.

Für $x = o$ ist

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(o - x') = \frac{x'y' - x'y''}{x'' - x'}$$

$$y = \frac{x'y' - x'y''}{x'' - x'} + y' = \frac{x'y' - x'y'' + x''y' - x'y'}{x'' - x'}$$

$$y = ob = \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}.$$

Für $y = o$ wird

$$o - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$$

$$x'y' - x''y' = x'y' - x'y'' + x(y'' - y')$$

$$x = \frac{x'y' - x''y' - x'y' + x'y''}{y'' - y'}$$

$$x = oa = \frac{x'y'' - x''y'}{y'' - y'} = \frac{x''y' - x'y''}{y' - y''}.$$

$x = oa$ und $y = ob$ sind jetzt die gesuchten Axenlängen. Wir dürfen in diesen Formeln nur $x' = \frac{1}{m}$, $x'' = \frac{1}{m'}$, $y' = \frac{1}{n}$ und $y'' = \frac{1}{n'}$ setzen, so bekommen wir die gesuchten Formeln des Paragraphen.

§. 71.

Kantenzonenpunkte heissen vorzugsweise diejenigen Punkte, für welche $m = n$ wird, d. h. die um gleiche Axenausdrücke von beiden Axen entfernt sind.

Die Wichtigkeit der *Kantenzonen* hat Herr Professor Weiſs bei allen Systemen nachgewiesen. Sie liegen sämmtlich in der Sektionslinie, welche der Dodekaidfläche der Oktaedrischen Axen angehört (d. h. welche für eine bestimmte Axenstellung $\overline{|a : b : \infty c|}$ hat, unter welchen Zeichen nur diejenigen zwei Reduktionsebenen gemeint sind, die der c parallel gehen). Es liegt im Begriffe der Axen, daſs alle Punkte dieser beiden Sektionslinien den allgemeinen Ausdruck $(\frac{a}{m} + \frac{b}{m})$ führen.

§. 72.

Die Sektionslinie, welche die Kantenzonenpunkte zweier anliegenden Quadranten verbindet, bekommt für die zwischen den Punkten liegende Axe den Ausdruck $\frac{2}{m+m'}$, *für die ausserhalb* $\frac{2}{m-m'}$

Ist z. B. Tab. I. im vordern rechten Quadranten der Kantenzonenpunkt $(\frac{a}{m}+\frac{b}{m})$ gegeben, im hintern rechten der Kantenzonenpunkt $(\frac{a'}{m'}+\frac{b}{m'})$, so sind diefs zwei anliegende Quadranten, zwischen den beiden Punkten liegt die Axe b, ausserhalb der Punkte die Axe a. Wollen wir die specielle Formel für die Sektionslinie dieser Punkte aus der allgemeinen Formel

$$\frac{m'n - mn'}{mm'(n-n')}\, a : \frac{m'n - mn'}{nn'(m'-m)}\, b$$

ableiten, so müssen wir in derselben, wenn wir $m = m$ und $n = m$ setzen, $m' = -m'$ und $n' = m'$ werden lassen, weil im Beweise des §. 70. für diese Lage m' als subtraktives Glied hinzutreten mufs. Dann wandelt sich aber die allgemeine Formel in:

$$\frac{-m'm - mm'}{-mm'(m-m')}\, a : \frac{-m'm - mm'}{mm'(-m'-m)}\, b$$

$$= \frac{2}{m-m'}\, a : \frac{2}{m+m'}\, b$$

Zahlenbeispiel. Die Hexakisoktaidfläche

$$g = \overline{/\tfrac{2}{3}a : 2b/}$$

(Tab. I.) fällt in den Dodekaidkantenzonenpunkt $(\frac{a}{1}+\frac{b'}{1})$ und in die Diagonalzone $(\frac{a}{2}+\frac{b}{2})$, folglich schneidet sie die zwischen liegende Axe a in $\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$, die ausserhalb liegende b in $\frac{2}{2-1}=2$, wie obiger Ausdruck zeigt.

Zusatz. Man könnte hier noch eine Menge specieller Fälle untersuchen, z. B. *wenn ein Zonenpunkt in der Axe liegt, der andere aber ein Kantenzonenpunkt ist.* Der Satz fällt in zwei Abtheilungen:

1) *Axen- und Kantenzonenpunkt in einem Quadranten.* Es sei $m = m$, $n = \infty$; alsdann liegt der Punkt $(\frac{a}{m} + \frac{b}{n})$ in der Axe a; denn es wird $\frac{b}{\infty} = ob$, d. h. eine Entfernung des Punktes von der Axe a, die in Theilen von b ausgedrückt wurde, ist nicht mehr vorhanden. Ferner sei $m' = m'$, $n' = m'$, weil dann Punkt $(\frac{a}{m'} + \frac{b}{n'})$ ein Kantenzonenpunkt ist. Daher wird jetzt die allgemeine Formel speciell diese:

$$\frac{m'.\infty - mm'}{m.m'(\infty - m')} a : \frac{m'.\infty - m.m'}{\infty m' (m' - m)} b$$

$$= \frac{\infty - m}{m\infty - mm'} a : \frac{\infty - m}{m'\infty - m.\infty} b$$

Da man nur reelle Werthe hat, so kann man die endlichen Gröſsen gegen die unendlichen verschwinden lassen, und mit ∞ wegdividiren; folglich erhalten wir:

$$\frac{\infty}{m\infty} a : \frac{\infty}{m'.\infty - m.\infty} b$$

$$= \frac{a}{m} : \frac{b}{m' - m}.$$

Zahlenbeispiel. Die Hexakisoktaidfläche

$$g = \overline{|2a : \tfrac{2}{3}b|}$$

(Tab. I.) schneidet die Axe a unter 2, also $m = \frac{1}{2}$ (weil die Zeichen immer auf die Form $\frac{1}{m}$ gebracht werden müssen, $(\frac{1}{\frac{1}{2}}) = 2$); sie liegt aber auch in der Diagonalzone des Oktaides $(\frac{a}{2} + \frac{b}{2})$, also $m' = 2$, folglich ist der

Axenausdruck

$$\frac{b}{m'-m} = \frac{b}{2-\frac{1}{2}} = \frac{b}{(\frac{3}{2})} = \frac{2}{3}\,b,$$

woraus obiges Zeichen für g folgt. Die Zeichen m und m' gelten nur absolut; man kann $m-m'$ oder $m'-m$ nehmen, wir bekommen immer denselben absoluten Axenausdruck, das Vorzeichen deutet nur die Axenrichtungen in den vier Quadranten an.

2) *Axen- und Kantenzonenpunkt liegen in anliegenden Quadranten.* Ist für den Kantenzonenpunkt $m'=m'$, $n'=m'$, so ist für die Axe $m=-m$ und $n=\infty$, daher muſs sich das specielle Zeichen in

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m'+m}$$

verwandeln.

Zahlenbeispiel. Das Icositetraid

$$\lambda = \overline{|a : \tfrac{1}{3}b|}$$

liegt in der Axe $\frac{a}{1}$, und im Diagonalzonenpunkte des Oktaides $(\frac{a'}{2}+\frac{b}{2})$, also so, daſs Zonenpunkt und Axenpunkt nicht in einem Quadranten liegen; folglich wird die Axenlänge in $b =$

$$\frac{b}{m'+m} = \frac{b}{2+1} = \frac{1}{3}\,b,$$

wodurch obiger Ausdruck hervorgeht.

Diese wenigen speciellen Formeln reichen meistens aus, daher übergehen wir alle weitern speciellern Fälle, z. B. wenn m ein Multiplum von n etc. wäre.

§. 73.

Sind zwei Sektionslinien

$$\overline{\left|\frac{a}{m} : \frac{b}{n}\right|} \text{ und } \overline{\left|\frac{a}{m'} : \frac{b}{n'}\right|}$$ (Tab. IV. Fig. 11)

gegeben, so erhält der gemeinsame Zonenpunkt beider den allgemeinen Ausdruck

$$\frac{n' - n}{mn' - m'n}\, a + \frac{m - m'}{mn' - m'n}\, b.$$

Die Sektionslinien haben den Ausdruck

$$\overline{\left|\frac{a}{m} : \frac{b}{n}\right|} \text{ und } \overline{\left|\frac{a}{m'} : \frac{b}{n'}\right|},$$

man soll den gemeinsamen Zonenpunkt $\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right)$ finden, in welchem sich beide schneiden. Es verhält sich aber

$$\frac{a}{m} : \frac{a}{x} = \frac{b}{n} : \frac{b}{n} - \frac{b}{y}, \text{d. h. } \frac{x}{m} = \frac{y}{y-n}$$

$$\frac{a}{m'} : \frac{a}{x} = \frac{b}{n'} : \frac{b}{n'} - \frac{b}{y}, \text{d. h. } \frac{x}{m'} = \frac{y}{y-n'}, \text{ daher}$$

$$x = \frac{ym}{y-n} = \frac{ym'}{y-n'}$$

$$m(y-n') = m'(y-n)$$

$$my - m'y = mn' - m'n$$

$$y = \frac{mn' - m'n}{m - m'} \quad \text{oder}$$

$$\frac{b}{y} = \frac{m - m'}{mn' - m'n}\, b.$$

Da $x = \frac{my}{y-n}$, so ist, weil

$$y - n = \frac{mn' - m'n}{m - m'} - n.$$

$$= \frac{mn' - m'n - mn + m'n}{m - m'}$$

$$= \frac{mn' - mn}{m - m'},$$

$$x = m. \frac{mn' - m'n}{m - m'} \cdot \frac{m - m'}{mn' - mn}$$

$$= \frac{m(mn'-m'n)}{m\ (n'-n)}$$

$$= \frac{mn' - m'n}{n' - n} \quad \text{oder}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{n' - n}{mn' - m'n}\ a,$$

was zu beweisen war. Die Quotienten zeigen, dafs die Nenner gleich sind, d. h. die Entfernungen der Zonenpunkte von den Axen sind rationale Multipla oder Submultipla der Axeneinheiten (cf. §. 61).

Zusatz. Diese Sätze (§. 69—73) geben uns in allen Fällen ein Mittel an die Hand, die Ausdrücke der Zonenpunkte und Sektionslinien zu finden, sobald dieselben deduktionsweise aus dem Oktaide gefolgert sind.

§. 74.

Um weitere Körper durch Deduktion zu erlangen, müssen wir andere Punkte ausser den Punkten der drei Körper zu Hülfe nehmen.

Mit dem Hexakisoktaide §. 68 waren alle Zonenpunkte der drei Körper (Oktaid, Hexaid, Dodekaid) verbunden. Um daher Körper mit andern Axenausdrücken, als die aufgeführten, zu bekommen, ist es nothwendig, dafs wir noch einen folgenden Körper zu Hülfe nehmen. Wir können hierzu jeden beliebigen wählen. Es wird alsdann ein unübersehbarer Reichthum von Flächen-Ausdrücken sich ergeben, die der Anfänger als Uebungsbeispiele lösen mag. Der allgemeinste Fall wird endlich der sein, dafs man sich zuletzt alle Punkte verbunden denkt, die auf Tab. I. durch die Sektionslinien sämmtlicher Körper entstanden sind. Alle diese neuen Sektionslinien sind mittelst obiger Formeln leicht gefunden. Ohne die Idee weiter auszuführen sieht man ein, dafs die dadurch construirten Linien sich auf der Projektionsebene dicht zusammendrängen werden, ja man kann die Construktion so in's Unendliche fortsetzen,

dafs zuletzt kein Winkel mehr denkbar ist, den die Linien nicht annäherungsweise mit einander machten. Daher kann man den Satz allgemein gelten lassen, *dafs in der Krystallographie nur solche Flächen vorkommen, die aus einem Oktaide durch Deduktion entwickelt sind.* In den gewöhnlichen Fällen sind die vorkommenden Flächen aus einer verhältnifsmäfsig geringen Anzahl von Zonenpunkten abgeleitet, mithin die Axenausdrücke der Flächen auch einfach. Wir wollen aus der Figur auf Tab. I. einige wenige Uebungsbeispiele entwickeln.

1*stes Beispiel.* Wir suchen die Fläche, welche den Zonenpunkt der Icositetraidflächen

$$\overline{\underline{/c : \tfrac{1}{2}a : b/}} \text{ und } \overline{\underline{/c : \tfrac{1}{2}b : a/}}$$

mit dem Zonenpunkte der Dodekaidfläche $\overline{\underline{/a : b : \infty c/}}$ und Oktaidfläche $\overline{\underline{/a : b : c/}}$ verbindet.

Bedeuten a und b die positiven Axen, welche den vordern rechten Quadranten einschliefsen, so findet sich der Zonenpunkt der beiden Icositetraidflächen, wenn wir in der allgemeinen Formel §. 73 die Sektionslinie

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{a}{2} : \frac{b}{1}; \quad \frac{a}{m'} : \frac{b}{n'} = \frac{a}{1} : \frac{b}{2}$$

setzen, d. h. $m=2$, $n=1$; $m'=1$, $n'=2$; dadurch verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$\frac{2 - 1}{2.2 - 1.1}\, a + \frac{2 - 1}{2.2 - 1.1}\, b = \frac{a}{3} + \frac{b}{3},$$

der Punkt ist also ein Kantenzonenpunkt. Der Zonenpunkt obiger Oktaidfläche mit der Dodekaidfläche

$$\overline{\underline{/a : b : \infty c/}} = \overline{\underline{\left/ \frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} : c \right/}},$$

unter welchen wir die mit dem Icositetraid in gleichen Quadranten liegenden Flächen verstehen wollen, hat Sektionslinien mit dem Zeichen

$$\frac{a}{1} : \frac{b}{1} \text{ und } \frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty};$$

folglich ist $m = 1$, $n = 1$; $m' = \infty$, $n' = \infty$;
der Zonenpunkt also:

$$\frac{\infty - 1}{1.\infty - \infty.1} a + \frac{1 - \infty}{1.\infty - \infty.1} b = \frac{\infty}{(1-1)\infty} a + \frac{-\infty}{(1-1)\infty} b.$$

$$= \frac{1}{1-1} a + \frac{-1}{1-1} b = \frac{a}{o} + \frac{-b}{o} = \infty a + -\infty b, \text{ d. h.}$$

es ist der Zonenpunkt, unter welchem die Oktaidflächenkante von $\overline{|a : b : c|}$ und $\overline{|a' : b' : c|}$ die Projektionsebene schneiden würde. Der Punkt ist ebenfalls ein Kantenzonenpunkt, der aber im Unendlichen liegt. Die neue Sektionslinie wird also zwei Kantenzonenpunkte $(\frac{a}{3} + \frac{b}{3})$ und $(\frac{a}{o} + \frac{-b}{o})$ mit einander verbinden, die, wie aus dem einzigen negativen Zeichen vor b folgt, in zwei anliegenden Quadranten liegen. Nach §. 72 ist die allgemeine Formel für die zwischen liegende Axe $\frac{2}{m+m'}$, für die ausserhalb $\frac{2}{m-m'}$, worin für unsern Fall $m = 3$, $m' = o$ wird; folglich ergeben sich die Ausdrücke $\frac{2}{3+0}$ und $\frac{2}{3-0}$, und die neue Fläche ist ein Triakisoctaid $= \overline{|c : \tfrac{2}{3} a : \tfrac{2}{3} b|}$.
Eine solche Fläche mufs die Kanten des Oktaides zuschärfen, denn man kann sie auch schreiben $\overline{|\tfrac{3}{2} c : a : b|}$.
Vom Icositetraid unterscheidet sie sich dadurch, dafs die dritte Axe unter einer Verhältnifszahl geschnitten wird, die gröfser als 1, während sie beim Icositetraide kleiner war (§. 64.).

2*tes Beispiel.* Wir suchen die Fläche, welche den Zonenpunkt der Tetrakishexaidflächen $\overline{|2a : c : \infty b|}$ und

$\overline{/2b : c : \infty a/}$ mit dem Zonenpunkte $(\frac{a}{o} + \frac{-b}{o})$ verbindet.

Es sind also wieder dieselben Quadranten, als im ersten Beispiele. Aus der Figur leuchtet unmittelbar ein, dafs der Zonenpunkt der beiden Tetrakishexaidflächen $(2a + 2b)$ ist. Es findet sich diefs aber auch durch Substitution in Formel §. 73, worin

$$(\frac{a}{m} + \frac{b}{n}) = (2a + \infty b);\ (\frac{a}{m'} + \frac{b}{n'}) = (\infty a + 2b)$$

zu setzen ist; also

$$m = \tfrac{1}{2},\ n = o;\ m' = o,\ n' = \tfrac{1}{2};\ \text{folglich}$$

$$\frac{\frac{1}{2} - o}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - o \cdot o}\, a + \frac{\frac{1}{2} - o}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - o \cdot o}\, b = 2a + 2b.$$

Die neue Fläche hat also den Ausdruck

$$\frac{2}{\frac{1}{2} + o}\, a : \frac{2}{\frac{1}{2} - o}\, b,\ \text{d. h.}$$

$$\overline{/c : 4a : 4b/} = \overline{/\tfrac{1}{4}c : a : b/} = \text{Icositetraid.}$$

In diesem Falle bedurfte es freilich gar nicht der Rechnungen, da man die Verhältnisse gleich aus der Figur ersieht, man darf nur durch $(2a + 2b)$ eine Linie parallel der Sektionslinie $\overline{/a : b/}$ ziehen, welche durch den Zonenpunkt $(\frac{a}{o} + \frac{-b}{o})$ geht, d. h. der Sektionslinie der Kantenzone parallel.

3tes Beispiel. Wir suchen die Fläche, welche den Zonenpunkt der Icositetraidflächen

$$\overline{/a : \tfrac{1}{2}b : c/} \text{ und } \overline{/b : \tfrac{1}{2}a' : c/}$$

mit dem Zonenpunkte der Icositetraidflächen

$$\overline{/a' : \tfrac{1}{2}b' : c/} \text{ und } \overline{/\tfrac{1}{2}a' : b' : c/}$$

verbindet.

Wie immer, so lassen wir auch hier die Entfernungen der Zonenpunkte von den Axen im vordern rechten Qua-

dranten positiv sein, dann sehen wir, daſs der Zonenpunkt der beiden ersten Flächen im hintern rechten Quadranten liegt, der zweite aber im hintern linken, ist ein Kantenzonenpunkt, $(\frac{-a}{3} + \frac{-b}{3})$, wie wir *Beispiel* 1 gesehen haben. Um also den ersten zu finden, setzen wir in §. 73

$$\overline{\left/\frac{a}{m} : \frac{b}{n}\right/} = \overline{\left/\frac{a}{1} : \frac{b}{2}\right/} \text{ und } \overline{\left/\frac{a}{m'} : \frac{b}{n'}\right/} = \overline{\left/\frac{a}{-2} : \frac{b}{1}\right/};$$

folglich $m = 1$, $n = 2$; $m' = -2$, $n' = 1$, also ist der Zonenpunkt:

$$\frac{1 - 2}{1.1 - (-2).2}\, a + \frac{1 - (-2)}{1.1 - (-2).2}\, b = \frac{-a}{5} + \frac{3b}{5}.$$

Die gesuchte Fläche fällt demnach in die Zonenpunkte

$$(\frac{a}{-3} + \frac{b}{-3}) \quad \text{und} \quad (\frac{a}{-5} + \frac{3b}{5}).$$

Nach §. 70 findet sich die Linie, wenn wir $m = -3$, $n = -3$; $m' = -5$, $n' = \frac{5}{3}$ setzen:

$$\frac{(-3).(-5) - \frac{5}{3}.(-3)}{(-3)\,(-5)\,[(-3) - \frac{5}{3}]}\, a : \frac{(-3).(-5) - \frac{5}{3}.(-3)}{(-3).\frac{5}{3}\,[(-5) - (-3)]}\, b$$

$$= \frac{3.5 + 5}{3.5.(\frac{-14}{3})}\, a : \frac{3.5 + 5}{(-5).(-2)}\, b = \frac{20}{-5.14}\, a : \frac{20}{10}\, b$$

$$= -\frac{2}{7}\, a : 2b;$$

die neue Fläche erhält den Ausdruck

$$\overline{/c : 2b : \tfrac{2}{7}a'/} = \overline{/\tfrac{1}{2}c : b : \tfrac{1}{7}a/} = \text{Hexakisoktaid.}$$

Sobald der Axenausdruck gefunden ist, können wir das negative Zeichen vernachlässigen, weil das Zeichen ganz allgemein jeden Flächenausdruck in sich faſst, der nur möglicher Weise durch Versetzung der Vorzeichen hervorgehen kann.

Legen wir ein Lineal durch die zwei Zonenpunkte, so

geht dieses durch den Axenpunkt $2b$, und zwischen $\frac{1}{3}a'$ und $\frac{1}{4}a'$ durch, zum Beweise, dafs wir uns nicht stark verrechnet haben können.

4tes Beispiel. Verbinden wir den Zonenpunkt der Sektionslinien

$$\overline{\underline{/\,3b' : 3a\,/}} \quad \text{und} \quad \overline{\underline{/\,\tfrac{1}{2}b : \infty a\,/}}$$

mit dem Zonenpunkte der Sektionslinien

$$\overline{\underline{/\,\tfrac{1}{2}b' : a\,/}} \quad \text{und} \quad \overline{\underline{/\,\tfrac{1}{2}b : a'\,/}},$$

so erhalten wir die

$$\text{Hexakisoktaidfläche} = \overline{/\tfrac{1}{5}c : \tfrac{1}{4}b : \tfrac{1}{2}a/}.$$

Denn für den ersten Zonenpunkt ist $m = \frac{1}{3}$, $n = -\frac{1}{3}$; $m' = 0$, $n' = 2$; für den zweiten $m = 1$, $n = -2$; $m' = -1$, $n' = 2$; folglich finden sich die Punkte nach §. 73:

$$1)\quad \frac{2-(-\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}.2-0(-\frac{1}{3})}\,a + \frac{\frac{1}{3}-0}{\frac{1}{3}.2-0(-\frac{1}{3})}\,b = \frac{2+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\,a + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\,b$$

$$= (\frac{7}{2}a + \frac{1}{2}b);$$

$$2)\quad \frac{2-(-2)}{1.2-(-1)(-2)}\,a + \frac{1-(-1)}{1.2-(-1)(-2)}\,b = \frac{4}{2-2}\,a + \frac{2}{2-2}\,b$$

$$= \frac{2}{1-1}a + \frac{1}{1-1}\,b = (\frac{2a}{0} + \frac{b}{0}).$$

Substituiren wir diese Ausdrücke der Zonenpunkte in die allgemeine Formel §. 70, so ist daselbst $m = \frac{2}{7}$, $n = 2$; $m' = \frac{0}{2}$, $n' = 0$, folglich die neue Sektionslinie:

$$\frac{2.\frac{0}{2}-0.\frac{2}{7}}{\frac{2}{7}.\frac{0}{2}(2-0)}\,a : \frac{2.\frac{0}{2}-0.\frac{2}{7}}{2.0(\frac{0}{2}-\frac{2}{7})}\,b = \frac{1-\frac{2}{7}}{\frac{1}{7}(2)}\,a : \frac{1-\frac{2}{7}}{2(\frac{0}{2}-\frac{2}{7})}\,b$$

$$= \frac{5}{2}a : -\frac{5}{4}b = \overline{\underline{/\,\tfrac{5}{2}a : \tfrac{5}{4}b'\,/}}.$$

Die Fläche hat daher obigen Ausdruck, wenn wir das negative Vorzeichen vernachlässigen.

Anmerk. Wir hätten auch in der Formel des zweiten Zonenpunktes $(\frac{4a}{2-2} + \frac{2b}{2-2}) = (\frac{4a}{0} + \frac{2b}{0})$ setzen können, da $2-2=0$ ist; dann wäre $m' = \frac{0}{4}$, $n' = \frac{0}{2}$;

während $m = \frac{2}{7}$, $n = 2$ bleibt. Durch Substitution ergäbe sich der Ausdruck

$$\frac{2 \cdot \frac{0}{4} - \frac{0}{2} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{2}{7} \cdot \frac{0}{4}\,(2 - \frac{0}{2})}\, a : \frac{2 \cdot \frac{0}{4} - \frac{0}{2} \cdot \frac{2}{7}}{2 \cdot \frac{0}{2}\,(\frac{0}{4} - \frac{2}{7})}\, b$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{7}}{\frac{1}{14}\,(2 - \frac{0}{2})}\, a : \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{7}}{(\frac{0}{4} - \frac{2}{7})}\, b = \frac{5}{2}\, a : - \frac{5}{4}\, b,$$

also ganz derselbe Ausdruck, wie oben, nur ist die erste Art einfacher, und daher vorzuziehen.

5tes Beispiel. Die Fläche zu bestimmen, welche in den Zonenpunkt der Sektionslinien

$$\overline{\underline{/\; a : \tfrac{1}{3} b \;/}} \quad \text{und} \quad \overline{\underline{/\; b : \tfrac{1}{2} a \;/}}$$

und in die Zonenaxe der Flächen

$$\overline{\underline{/c : \infty a : \infty b/}} \quad \text{und} \quad \overline{\underline{/\tfrac{1}{2} a : \tfrac{1}{3} b : c/}}$$

fällt.

Für den ersten Zonenpunkt ist $m = 1$, $n = 3$; $m' = 2$, $n' = 1$;
für den zweiten ist $m = 0$, $n = 0$; $m' = 2$, $n' = 3$;
folglich erhalten wir für die Zonenpunkte

1) $$\frac{1 - 3}{1.1 - 2.3}\, a + \frac{1 - 2}{1.1 - 2.3}\, b = \frac{2}{5}\, a + \frac{1}{5}\, b;$$

2) $$\frac{3 - 0}{0.3 - 2.0}\, a + \frac{0\;\;2}{0.3 - 2.0}\, b = \frac{3}{0(3-2)}\, a + \frac{-2}{0(3-2)}\, b$$

$$= \frac{3}{0} a + \frac{-2}{0} b = (3. \infty a + 2. \infty b').$$

Die Sektionslinie, welche diese beiden Zonenpunkte verbindet, erhält nach §. 70, worin $m = \frac{5}{2}$, $n = 5$; $m' = \frac{0}{3}$, $n' = -\frac{0}{2}$, den Ausdruck:

$$\frac{5 \cdot \frac{0}{3} - (-\frac{0}{2}) \cdot \frac{5}{2}}{\frac{5}{2} \cdot \frac{0}{3}\,[5 - (-\frac{0}{2})\,]}\, a : \frac{5 \cdot \frac{0}{3} - (-\frac{0}{2}) \cdot \frac{5}{2}}{5 \cdot (-\frac{0}{2})\,(\frac{0}{3} - \frac{5}{2})}\, b$$

$$= \frac{5 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3}\,(5 + \frac{0}{2})}\, a : \frac{5 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}}{-5 \cdot \frac{1}{2}\,(\frac{0}{3} - \frac{5}{2})}\, b$$

$$= \frac{20 + 15}{10 \,.\, 5}\, a : \frac{20 + 15}{30 \,.\, \frac{5}{2}}\, b = \frac{7}{10}\, a : \frac{7}{15}\, b.$$

Wir erhalten daher eine

Hexakisoktaidfläche = $\overline{\underline{/\tfrac{1}{7}c : \tfrac{1}{13}b : \tfrac{1}{10}a/}}$.

Anmerk. Man mufs sehr vorsichtig bei der Substitution von 0 und ∞ sein, weil man leicht auf widersprechende Resultate kommen könnte. Die Rechnungen werden aber immer richtig ausfallen, wenn wir unter 0 die Differenz $p - p$, d. h. 1-1, 2-2, 3-3 etc. verstehen, und unter ∞ den Quotienten $\frac{1}{0}$, so dafs $\frac{p}{0} = p\,\frac{1}{0} = p.\infty$, d. h. $\frac{1}{0} = 1.\infty$, $\frac{2}{0} = 2.\infty$, $\frac{3}{0} = 3.\infty$ etc.... Unter dieser Voraussetzung ist es erlaubt, 0 und ∞ ganz wie ganze Zahlen zu behandeln, d. h. wir können diejenigen Quotienten, welche die 0 und ∞ als gemeinschaftliche Faktoren enthalten, durch Multiplication und Division theilweise davon befreien. Sobald dieses geschehen, setzen wir $\infty - p = \infty$, wenn p eine endliche Zahl ist. Denn da $\infty = \frac{1}{0}$, so ist $\frac{1}{0} - p = \frac{1 - p.0}{0} + \frac{1 - 0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$; weil $p.o = p\ (p - p) = p.p - p.p = 0$, nach obiger Voraussetzung. Nach derselben Regel ist auch $\frac{0}{p} = 0$. Sollte sich aber dennoch ein Bedenken finden, so darf man nur einen Blick auf die Projektionsfigur werfen, wodurch sogleich alle Zweifel gehoben werden. Die obigen Beispiele liefern den Beleg.

Zusatz. Wenn ein Zonenpunkt im Unendlichen liegt, so ist sehr darauf zu achten, in welcher Richtung er sich befindet; diese Richtung ist an den Vorzeichen des Unendlichen zu kennen. Heifst z. B. der Zonenpunkt

$$(\infty a + \infty b),$$

so liegt der Punkt in der Richtung der Sektionslinie von der Fläche $\overline{\underline{/a : b : \infty c/}}$, weil nur die Punkte dieser Sektionslinie die Eigenschaft haben, um gleiche Axeneinheiten von den Axen a und b abzustehen. Denkt man daher einen Punkt, der unendlich weit vom Mittelpunkte der Con-

struktion entfernt ist, so wird dieser vor a und b dasselbe Zeichen ∞ erhalten müssen. Hiefse der Zonenpunkt

$$(2\infty a + \infty b),$$

so würde er auf einer Sektionslinie zu suchen sein, deren Punkte von b um doppelt so viel Axeneinheiten als von a entfernt sind. Die Sektionslinie müfste der Säulenfläche $\overline{/2a : b : \infty c/}$ angehören, denn die Punkte dieser Linien haben die Eigenschaft, dafs wenn der Punkt von a um mb entfernt ist, er von b um $2ma$ entfernt sein mufs. Mithin gehört allgemein ein Punkt $(m\infty a + n\infty b)$ der Sektionslinie einer Säule $\overline{/ma : nb : \infty c/}$ an. Um diesen Zonenpunkt auf der Sektionsebene mit einem beliebigen andern Punkte zu verbinden, dürfen wir nur durch letztern mit der Sektionslinie jener Säulenfläche eine Parallele ziehen. Im 5*ten Beispiel* sollten wir eine Fläche finden, deren Sektionslinie durch $(\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b)$ geht, zu gleicher Zeit aber in den Zonenpunkt der Flächen $\overline{/c : \infty a : \infty b/}$ und $\overline{/\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}b : c/}$ fällt. Dieser Zonenpunkt lag im Unendlichen, weil die Zonenaxe beider der Projektionsebene parallel geht; er mufs also in der Richtung der Sektionslinie $\overline{/\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}b/}$ liegen, oder, was dasselbe ist, in der Richtung der Sektionslinie von der Säule $\overline{/\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}b : \infty c/}$. Der Zonenpunkt, welcher in der Sektionslinie dieser Säule im Unendlichen liegt, hat daher das Zeichen

$$\left(\frac{\infty}{2}a + \frac{\infty}{3}b\right) = (3 \cdot \infty a + 2\infty b),$$

wie wir auch wirklich gefunden haben. Die Sektionslinie der einen Fläche ist daher construirt, wenn wir durch Punkt $(\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b)$ mit der Linie

$$\overline{/\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}b/} = \overline{/3a : 2b/}$$

eine Parallele ziehen.

§. 75.

Aus den sechs Flächen des Dodekaides läſst sich ebenfalls ein unbegränztes System von Flächen deduciren.

Um aus dem Oktaide Flächen zu deduciren, muſsten wir zunächst uns die drei Hexaidflächen verschaffen, alsdann bekamen wir aber durch weitere Verbindung so viel Punkte, daſs eine unbegränzte Menge von Sektionslinien hervorging. Es findet sich jedoch in sehr vielen Fällen, daſs nicht alle drei zugehörige Hexaidflächen am Oktaide vorhanden sind, es sind dann zu weitern Deduktionen auch zwei hinreichend. Zwei müssen aber in jedem Falle vorhanden sein, weil sonst kein weiterer Fortschritt bewerkstelligt werden kann. Zwei Hexaidflächen mit dem zugehörigen Oktaide bilden ein Dodekaid (d. h. die 2+4 Flächen zeigen den Zonenconnexus des Dodekaides), daher ist dieser Körper zu einer selbstständigen Flächendeduktion hinreichend. Es versteht sich von selbst, daſs diese Deduktion, wenn wir die dritte Hexaidfläche ganz weglassen, nur einen Theil jener vollständigen Figur Tab. I. geben kann, und daſs wir bei der Deduktion der erstern Flächen nur einen beschränktern Gang verfolgen können, wie die folgende Auseinandersetzung zeigen wird.

Gegeben sind die Dodekaidflächen 1 bis 6 (Tab. II. Fig. 5.). Der Zonenpunkt 5.6 ist mit 1.2 und 3.4 noch nicht verbunden, dieſs gibt uns zwei neue Flächen, deren Sektionslinien die Axen a und b sein mögen, dann haben die 6 Dodekaidflächen die Ausdrücke:

$$\overline{\underline{/a : c : \infty b/}}, \quad \overline{\underline{/b : c : \infty a/}} \text{ und } \overline{\underline{/a : b : \infty c/}};$$

die Flächen in den Axen

$$\overline{/a : \infty b : \infty c/} \text{ und } \overline{/b : \infty a : \infty c/}.$$

Durch die Linien a und b sind uns vier neue Zonenpunkte eingesetzt ($a.3$, $a.4$, $b.1$, $b.2$); um weiter fortzuschreiten, müssen wir entweder einen dieser 4 Punkte mit den Dodekaidkanten oder die 4 Punkte unter sich verbinden,

ein anderer Fall ist nicht möglich. Verbinden wir $a.4$ und $a.5$ mit den zwei noch nicht verbundenen Oktaidkanten, so bekommen wir die 4 dem Icositetraide entsprechenden Flächen

$$l = \overline{\underline{/a : \tfrac{1}{2}b : c/}};$$

verbinden wir die beiden andern Punkte $b.1$ und $b.2$ mit den zwei noch nicht verbundenen Oktaidkanten, so bekommen wir 4 Flächen:

$$\lambda = \overline{\underline{/b : \tfrac{1}{2}a : c/}};$$

verbinden wir endlich die 4 Punkte unter sich, so bekommen wir die 4 Flächen:

$$o = \overline{\underline{/a : b : c/}}.$$

Jetzt sind bereits eine solche Menge Punkte vorhanden, dafs dadurch eine unübersehbare Menge von Flächen gegeben sind, deren Entwickelung wir übergehen.

Zusatz. Die meisten Systeme zeigen selbst von den Deduktionsflächen des Dodekaides nur einen Theil, wodurch die Entwickelung sehr an Einfachheit gewinnt. So kann man z. B. die Sektionslinie b ganz weglassen, und nur die Zonenpunkte verbinden, welche a mit 3 und 4 macht, ja man braucht von letztern nur einen einzigen, um weiter fortzuschreiten. Wir sehen daher schon bei den ersten Gliedern dieser Kette eine reiche Mannigfaltigkeit.

§. 76.

Ist uns ein System von Flächen gegeben, die in einem Deduktionszusammenhange stehen, so sind meistens eine Menge Oktaide vorhanden, aus denen man sämmtliche Flächen ableiten kann.

Um eine vollkommene Einsicht in diesen Satz zu bekommen, dürfen wir nur das Oktaid (1, 2, 3, 4) mit seinem Deduktionshexaid (5, 6, 7) auf Tab. II. Fig. 1 zu Grunde legen (das Dodekaid denke man sich hinweg; dem Anfänger rathen wir, die Figur der Flächen 1—7 sich beson-

ders zu zeichnen). Das Oktaid, von dem wir ausgehen, bilden die Flächen 1—4, die Flächen 3—7 sind die deducirten Hexaidflächen. Um nun ein anderes Oktaid zu bekommen, können wir statt zweier Oktaidflächen 2 Hexaidflächen setzen, 1256 geben ein neues Oktaid, oder auch 3456. Legen wir diese zu Grunde, so lassen sich ebenfalls die übrigen drei Flächen deduciren. Eine Hexaidfläche mit 3 Oktaidflächen verbunden geben nie ein Oktaid, sondern nur einen Vierzonenkörper. Wohl aber können wir je zwei Hexaidflächen zwei Mal mit zwei Oktaidflächen zusammen nehmen, weil letztere mit ersteren in 2 Fällen keine Zone mit einander gemein haben, so dafs keine 6seitige Säule vorkommen kann. Daher sind 1357, 2457, 1467, 2367 noch brauchbare Oktaide. Es sind demnach ausser dem Hauptoktaide noch 6 Oktaide vorhanden, von denen man ausgehen könnte. Zwar kann man noch die drei Hexaidflächen mit einer Oktaidfläche nehmen, also: 5671, 5672, 5673, 5674, was 4 neue Oktaide gäbe, doch kann man aus diesen die übrigen 3 Flächen nicht deduciren, daher sind sie für die Entwickelung unbrauchbar. Wollten wir nun weiter gehen, und die Dodekaidflächen noch zu Hülfe nehmen, so würde die Anzahl der Oktaide sogleich zu einer ungeheuern Anzahl anwachsen, die meisten davon würden zur Entwickelung brauchbar sein. Haben wir daher einen vielflächigen Krystall vor uns, so müssen wir bei der Wahl des ersten Oktaides immer darauf sehen, dafs die übrigen Flächen deduktionsweise aus dem zu Grunde gelegten Oktaide folgen. Bei der grofsen Menge von Oktaiden wird diese Wahl selten schwer fallen.

§. 77.

Ein System von Deduktionsflächen wird auf jede beliebige Deduktionsebene projicirt, wenn man zuerst ein passendes Oktaid auf die neu gewählte Projektionsebene projicirt, und sodann die andern Flächen daraus ableitet.

Der Satz folgt unmittelbar aus §. 60. Die Wahl des

Oktaides macht gar keine Schwierigkeit, da man auf jeder beliebigen Projektionsebene den Flächenzusammenhang wieder erkennen kann. In der Praxis hat man vorzüglich darauf zu sehen, welche Sektionslinien auf der neuen Projektionsebene parallel, und welche nicht parallel werden. Da jede Ebene jede schneidet, so kann man auf jeder Fläche die Sektionslinien der übrigen sehen, nur strahlen die Sektionslinien auf denjenigen Flächen, welche nicht die Projektionsebene bilden, von einem einzigen Punkte aus, weil sämmtliche Flächen durch den gemeinsamen Punkt gehen. Wollten wir z. B. die Flächen in Fig. 1. Tab. II. auf die Ebene 7...7 projiciren, so sind sie im Grunde schon alle darauf projicirt, wenn wir uns die Ebene 7...7 in ihrer aufrechten Stellung lebendig vorstellen, nur ist diefs eine verbotene Projektionsart, weil der allen Ebenen gemeinschaftliche Punkt in der Projektionsebene liegt. Denken wir uns nun aber die neue Projektionsebene aus dem gemeinschaftlichen Punkte herausbewegt, so werden alle diejenigen Flächen, welche mit ihr in einer mehr als 4flächigen Zone liegen, auf ihr als neuer Projektionsebene parallele Sektionslinien erhalten. Es werden also 10 und 5; 1, 2 und 13; 8, 6 und 9; 3, 12 und 4 parallele Sektionslinien zeigen; es mufs diefs sein, da die neue Sektionsebene in ihrer Bewegung der Zonenaxe jener Flächen parallel bleibt. Wir könnten, um die Projektion zu beginnen, das Oktaid 1, 2, 8, 9 nehmen, zu diesem bildet 7 die zugehörige Hexaidfläche, daher bilden die Sektionslinien des Oktaides auf der Projektionsebene 7 ein Parallelogramm. Fläche 5 ist die zweite zugehörige Hexaidfläche, daraus findet sich 10 etc....

Zusatz. Da man durch die Projektion blofs die Einsicht in die Zonenverhältnisse eines Systems erlangen will, so sind die Ausdehnungen der Sektionslinien und die Winkel, unter welchen sie sich schneiden, gleichgültig. Will man bei der Projektion diese Winkel- und Dimensionsver-

hältnisse berücksichtigen, so mufs man vorher die Winkel und Dimensionen durch Rechnung finden, was für die Anschauung unnöthig ist. Wir haben in diesem allgemeinen Kapitel nirgends darauf Rücksicht genommen, da es uns nur darum zu thun war, den Geist der Behandlung gehörig in's Licht zu stellen. Dem Anfänger macht eine solche allgemeine Betrachtung zwar Schwierigkeit, die er jedoch bald überwindet, und dann um so sicherer der Form Meister wird.

§. 78.

Das Hexaid nebst einer Zonenrichtung, von den Hexaidzonen verschieden, reichen zu einer vollständigen Deduktion der Flächen hin.

In der Anwendung zieht man es häufig vor, um gewisse Axenrichtungen bequemer legen zu können, nicht von einem Oktaide, sondern von einem Hexaide auszugehen, zu dem wir noch eine Zonenrichtung nehmen, und dieses reicht dann auch völlig hin. Sind z. B. die drei Sektionslinien (1, 2 und 3 Fig. 34. Tab. IV.) eines Hexaides gegeben, so darf ich nur noch einen Zonenpunkt a haben, welcher einer gegebenen Zonenaxe gehört, dann kann ich von a nach Punkt 1.3, von a nach Punkt 2.3 und von a nach 1.2 neue Sektionslinien (4, 5, 6,) ziehen, dadurch entsteht mir ein Dodekaid (Oktaid 1, 2, 4, 5 mit zwei Hexaidflächen 3, 6), welches nach §. 75 zu einer vollständigen Deduktion hinreicht. Gewöhnlich pflegt man die Projektionsebene so gegen das Hexaid zu drehen, dafs die Fläche 6 mit der Projektionsebene eine solche Sektionslinie 6...6 bildet, auf welcher das Stück $oa = ob$ ist, damit die in o halbirte ab zugleich als Axe benutzt werden kann. Diefs ist der einzige Zweck, den man dabei zu erreichen strebt. Dieser Zweck kann aber immer erreicht werden, da man mittelst Drehung der Projektionsebene jede beliebige Theilung der Linie ab durch o hervorzubringen im Stande ist. Dafs der Punkt a nicht blos ausserhalb, sondern auch in-

nerhalb des Dreiecks der Sektionslinien 1 2 3 liegen könne, leuchtet an sich ein.

Zusatz. Nennen wir den gemeinschaftlichen Punkt der sechs Flächen ausserhalb der Projektionsebene x (Tab. IV. Fig. 34), so wird die Hexaidkante xo mit der gegebenen Richtung xa und mit der durch Ebene 3 und 6 entstandenen Zonenaxe xb constante Winkel bilden müssen. Denken wir uns also die Linien xa, xo und xb in der Ebene 6 (Tab. IV. Fig. 35), so wird die Sektionsebene dagegen alle möglichen Lagen einnehmen, also die Ebene 6 unter Linien (zy, z^0y^0, $z'y'$) schneiden können, die im Punkte o so getheilt werden, dafs $oz : oy$, $oz' : oy'$ und $oz^0 : oy^0 \ldots$ jedes mögliche Verhältnifs erlangen, unter denen sich auch das Verhältnifs der Gleichheit finden mufs: $oz = oy$.

§. 79.

Vier Zonenpunkte reichen zu einer selbstständigen Flächendeduktion hin.

Halte ich in einem Krystalle vier Richtungen fest, deren vier Zonenpunkte auf der Projektionsfläche $abcd$ heifsen mögen, so liegen in diesen vier Zonenpunkten zunächst die vier Flächen (ab, ac, bd, cd) eines Oktaides, ferner die zwei Flächen eines zum Oktaide zugehörigen Hexaides (ad, cd). So dafs wir ein Dodekaid bekommen, welches zu einer selbstständigen Deduktion hinreicht (§. 75).

Zusatz. Wollte man von drei Zonenaxen und einer Fläche ausgehen, die ausserhalb der drei Zonenaxen liegt, so bestimmte diefs im günstigsten Falle ein Oktaid; wir müssten also noch einen Punkt oder noch eine Fläche annehmen, um weiter zu kommen. 2 Punkte und 2 Zonenaxen reichen ebenfalls nicht hin.

Schluss.

Wenn der Anfang mit dem Begriffe der Krystallräume begann, so endigt der Schlufs mit dem Begriffe der Rich-

tungen. Wir hätten unsere ganze Betrachtungen auch umgekehrt anstellen, und mit dem Begriffe der Richtung beginnen können. Allein wir haben den eingeschlagenen Weg für den anschaulichsten gehalten, und ihn daher vorgezogen; zumal da der umgekehrte Weg, mit den Richtungen beginnend, schon vielfach ausgebildet ist, wenn auch vielleicht nicht mit der systematischen Consequenz durchgeführt, wie der unsrige.

Anwendung der Zonenlehre auf

Krystalle.

Da wir uns jetzt noch auf dem rein mathematischen Standpunkte befinden, die Systematik noch gar nicht kennen: so müssen wir von allen physikalischen Eigenschaften der Krystalle absehend jede Fläche nur als die Gränzfläche eines Krystallraumes betrachten. Wir werden die Krystallräume mit Buchstaben bezeichnen, ihre systematischen Benennungen nur beiläufig anführen, ohne sie zu rechtfertigen oder zu erklären. Eine solche Betrachtung des Krystalls hat den einzigen Zweck, die Anschauung des Beobachters zu vervollkommnen, und der Darstellung lebendige Gewandtheit zu verschaffen.

Vor allem müssen wir erinnern, dafs es zu der wesentlichsten Bestimmung des Krystallraumes gehörte, nach den beiden unendlichen Dimensionen endlos, nach der dritten endlichen Dimension beliebig veränderlich zu sein. Dadurch wird die äussere Form eines und desselben Krystalls mannigfach verändert, nur die Zonen (Richtungen) in ihrer gegenseitigen Lage bleiben konstant. Professor

Weifs hat zuerst diese Grundidee mit Nachdruck hervorgehoben, nach allen Seiten verfolgt, und dadurch die Krystallographie zu einer abgeschlossenen Wissenschaft gemacht. Daher verweisen wir auf die Schriften desselben in den Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin seit 1814. Bevor jedoch der Anfänger an dieses Studium geht, rathen wir ihm, sich mit dem Geiste der allgemeinen Zonenlehre vertraut zu machen.

Den Krystallräumen oder vielmehr den Reduktionsebenen der Krystallräume kann man nur Richtungen (Axen) zu Grunde legen, wenn dieselben sämmtlich durch einen gemeinschaftlichen Punkt gelegt sind. Der gemeinschaftliche Punkt kann liegen, wo es auch sei, nur ausserhalb der Projektionsebene, weil in letzterm Falle sämmtliche Reduktionsebenen nur einen einzigen Zonenpunkt haben würden. Denn wie in der Mathematik die gewöhnlichen Zahlengesetze auf die Null nicht angewendet werden dürfen, so verlieren auch alle Zonengesetze ihre Geltung, sobald die Projektionsebene mit dem gemeinschaftlichen Punkt zusammenfällt.

Feldspath.

Gemeiner Feldspath (Orthoklas), Albit, Periklin, Anorthit, Labrador zeigen sämmtlich denselben Typus, nur schneiden sich ihre gleichliegenden Flächen unter etwas verschiedenen Winkeln; da wir selbst aber von der Winkelgröfse absehen: so gilt, was wir von einem sagen, für alle. Das Feldspathsystem ist geschichtlich wichtig geworden, weil Prof. Weifs dasselbe als Beispiel wählte, an dem er seine krystallographischen Grundideen entwickelt hat. Der Feldspath (Tab. III. Fig. 1—4) erscheint in einer geschobenen vierseitigen Säule, durch die Krystallräume T und T' gebildet. Eine dritte Fläche P, der Hauptblätterbruch, schneidet diese schief, denn sie fällt mit der Säukante (T/T') nicht in eine Zone. Die Krystallräume PTT'

müssen defshalb ein Hexaid mit drei Richtungen *T/T*, *P/T*, *P/T* bilden. Wollten wir die drei Zonen des Hexaides zu Grunde legen, so bekämen die 3 Flächen den Ausdruck $\overline{|a : \infty b : \infty c|}$. Allein wir werden dann bald bemerken, dafs die Deduktion nicht weiter fortschreiten kann. Zwar sehen wir die Kante dieses Hexaides z. B. durch *M* die Säule *T/T* abgestumpft, daher würde *M* einer Axe parallel gehen, also das Zeichen ∞ bekommen; aber die beiden andern Zeichen lassen sich nicht ermitteln. Wie mit diesem Hexaide, so mit jedem andern. Wir müssen also nothwendig von einem Oktaide ausgehen.

Wenn wir 4 Flächen wählen, von denen die Dimensionsbestimmungen entlehnt werden sollen, so müssen wir uns vor allen Dingen überzeugen, dafs die 4 Flächen (Krystallräume) auch wirklich ein Oktaid begränzen. Hätten wir z. B. die Flächen *TT′PM* zu einem Oktaide gewählt, so würden wir bald einsehen, dafs *TT′M* in einer sechsseitigen Säule liegen, folglich die vier Krystallräume einen Vierzonenkörper bilden. Nehmen wir aber zu den drei Krystallräumen *TT′P* einen vierten *x*, so fallen von diesen vier Flächen nie drei in eine Zone, sie bilden daher einen Körper mit 6 Zonen (*P/x*, *P/T′*, *P/T*, *x/T′*, *x/T*, *T/T′*), weil vier Krystallräume nur *Vier* oder *Sechs Säulen* bilden können, jeder andere Fall undenkbar bleibt.

Jetzt kommt es weiter darauf an, welche Axen wir diesem gewählten Oktaide unterlegen. Zweierlei waren die möglichst einfachsten:

1) solche, dafs die Flächen den Ausdruck $\overline{|a : b : c|}$ oder

2) den Ausdruck $\overline{|a : b : \infty c|}$

bekommen. Beim Feldspath nöthigt uns die Systematik den 2ten Fall zu wählen, d. h. man nimmt das Oktaid in seiner Säulenstellung (§. 62). Die aufrechte Axe, welche der Säule *T/T′* parallel geht, nenne man stets *c*; die der *P/x*

parallele b; die dritte, welche die Ecken des Oktaides verbindet (wenn das Oktaid im Gleichgewicht gedacht ist §. 41) heifst a. Der Krystall ist also auf der Fig. 1—4 so gezeichnet, dafs die Hauptaxe c aufrecht, die b uns zugekehrt, a aber seitlich steht. Wir sprechen vom Krystalle immer so, als wäre uns a zugekehrt, b seitlich und c aufrecht. Unter diesen Voraussetzungen ist:

$$P = \overline{\underline{|a : c : \infty b|}}$$

$$x = \overline{\underline{|a' : c : \infty b|}}$$

$$T = \overline{\underline{|a : b : \infty c|}}$$

$$T = \overline{\underline{|a : b' : \infty c|}}$$

Diefs ist die Grundannahme, von der wir ausgehen, und welche für jedes Oktaid gilt. Die gestrichelten Axen (a' und b') sollen nur bezeichnen, dafs a' auf der Hinterseite, und b' auf der linken Seite liegt, vorausgesetzt, dafs a uns zugekehrt ist. Daraus folgt dann von selbst, dafs c' dem c entgegen nach unten steht.

Um nun weiter deduciren zu können, müssen wir nothwendig zwei Deduktionshexaidflächen haben. Diese kommen auch wirklich, wie wohl selten, vor. Es sind die Flächen g. Von ihnen stumpft g' die obere linke Ecke ($xPTT'$) ab; denn sie fällt mit T'/x und P/T in eine Zone. Dafs sie mit T'/x in eine Zone falle, sieht man unmittelbar aus der Parallelität der Kanten von g'/x mit g'/T'. Aber auch mit P und T fällt g' in eine Zone, denn die Fläche o' dazwischen hat nur die Kante T/g' abgestumpft, würde o' wegfallen, so spränge die Parallelität unmittelbar in die Augen. Dasselbe gilt auch von der Fläche g in Beziehung auf die obere rechte Oktaidecke.

Projiciren wir daher unsere sechs Flächen auf die Dodekaidfläche des Oktaides (Tab. III. Fig. 5), so müssen die Sektionslinien von P und x auf der Projektionsebene miteinander parallel gehen, sobald wir diejenige Dodekaid-

fläche nehmen, welche die Kante P/x abstumpft, was durch die gewählte Stellung nothwendig wird (§. 62). Die Sektionslinien g' und g gehen dann ebenfalls einander parallel, und verbinden je zwei Kanten des Oktaides. Die Ausdrücke der Flächen sind daher:

$$g = \overline{\underline{|b : c : \infty a|}}$$

$$g' = \overline{\underline{|b' : c : \infty a|}}$$

Wir haben also ein vollständiges Dodekaid erhalten, aus dem wir weitere Flächen zu deduciren im Stande sind (§. 75). Die dritte Hexaidfläche (k) fehlt zwar nicht, sie mufs die vordere Säulenkante abstumpfen, d. h. die Kantenpunkte (Zonenpunkte) P/x und T/T' mit einander verbinden, allein sie erscheint selten, und ist auch zur Deduktion nicht nothwendig.

Um bei der Abwesenheit von k weiter schreiten zu können, müssen wir nothwendig M wählen, denn dieses fällt in die Kante g/g', und stumpft zu gleicher Zeit die Säulenkante T'/T ab; auf die Projektionsfigur eingetragen ergibt sich der Ausdruck:

$$M = \overline{\underline{|b : \infty a : \infty c|}}$$

M ist am Feldspath der 2te Blätterbruch, der zu gleicher Zeit mit T und T' eine sechsseitige Säule bildet.

Jetzt schreiten wir unmittelbar zu den augitartigen Paaren o und n fort. o' fällt in die Diagonalzone von x, d. h. stumpft Kante M/x ab, und zugleich in die erste Kantenzone, d. h. in die Zone P/T, denn wir sehen von P über g' nach o' und T eine Parallelität der Kanten. Diese Flächen in die Projektionsfigur eingetragen, geben:

$$o' = \overline{\underline{|a' : \tfrac{1}{2}b' : c|}}$$

$$o = \overline{\underline{|a' : \tfrac{1}{2}b : c|}}$$

Wie o hinten die Kanten M/x abstumpft, so stumpft n' die vordern Kanten P/M ab, wie die Kantenparallelität

zwischen $Pn'M$ zeigt. Ausserdem fällt n' (Fig. 1) noch in eine Zone mit T'/o', so dafs wir bekommen:

$$n' = \overline{/a : \tfrac{1}{4}b' : c/}$$

$$n = \overline{/a : \tfrac{1}{4}b : c/}$$

Alle weiteren Flächendeduktionen sind jetzt ein blofses Ziehen von Linien in der Projektionsfigur, nur müssen wir vorsichtig darauf sehen, dafs die Sektionslinien genau den gleichbenannten Flächen der Krystallfiguren entsprechen.

So fällt y in die Vertikalzone von Kante P/x, und zugleich in die Zone von n'/o', daraus ergibt sich der Ausdruck:

$$y = \overline{/\tfrac{1}{3}a' : c : \infty b/}$$

Die Flächen m und m' auf der Vorderseite stumpfen die Oktaidkanten P/T und P/T' ab, liegen in der ersten Kantenzone, und fallen zugleich in eine Zone, welche von n nach T' und n' nach T geht, daher

$$m' = \overline{/\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}b' : c/}$$

$$m = \overline{/\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}b : c/}$$

Die Fläche t fällt in die Vertikalzone x/P, geht also der b parallel, und bildet zu gleicher Zeit mit m'/n' eine sechsseitige Säule, daher

$$t = \overline{/\tfrac{1}{5}a : c : \infty b/}$$

Fläche s' in der Diagonalzone von x und in der Zone n'/T ist:

$$s' = \overline{/a' : c : \tfrac{1}{6}b'/}$$

$$s = \overline{/a' : c : \tfrac{1}{6}b/}$$

Fläche u' in der Diagonalzone von y, d. h. in einer Zone, die von M über v' nach y geht, und zugleich in einer Zone von T nach o' ist:

$$u' = \overline{/\tfrac{1}{3}a' : c : \tfrac{1}{4}b'/}$$

Fläche v' in derselben Diagonalzone von y aber zugleich in der Zone von T nach n' ist:

$$v' = \overline{/\tfrac{1}{3}a' : c : \tfrac{1}{8}b'/}$$

Endlich die beiden z, in einer Säulenzone von T/T' und zu gleicher Zeit von o/v und o'/v' liegend, erhalten den Ausdruck

$$z = \overline{/a : \tfrac{1}{3}b' : c/}$$

$$z = \overline{/a' : \tfrac{1}{3}b' : c/} = \overline{/a : \tfrac{1}{3}b : c/}.$$

Wir sehen auf diese Weise alle Flächen auseinander deducirt. Die wenigen, welche fehlen, reihen sich leicht an obige an. Nur müssen nothwendig von jeder zwei Zonen bekannt sein. Ist die Fläche nur durch eine Zone gegeben, so wird zur Bestimmung noch ein Winkel erforderlich, wie das in der rechnenden Krystallographie nachzuweisen ist.

Werfen wir einen Blick auf die Projektion sämmtlicher Flächen Fig. 5, so sehen wir im Mittelpunkte der Konstruktion eine 10seitige Säule durch fünf Sektionslinien (T, T', M, z und z) dargestellt, und würde die Axe b noch als eine Sektionslinie gedacht (die wirklich zuweilen vorkommt), so wäre die Säule 12seitig. Besonders entwickelt sind die vordern 2 Kantenzonen (PT' und PT) des Hauptoktaides ($TT'Px$), daher werden diese auch die ersten Kantenzonen genannt, in welchen je 6 Flächen liegen ($Pm\,Tu'\,o'\,g'$ und $Pm'\,T'u\,o\,g$). Zu gleicher Zeit sehen wir auch, daſs m die vordere stumpfe Kante PT abstumpft, o' die hintere scharfe; denn wir dürfen uns diese ganze Zone nur als Säule denken, so springt das Gesagte sogleich in die Augen. Ueberhaupt gilt die Regel allgemein, daſs eine dritte zu einer vierseitigen Säule hinzutretende Fläche die stumpfe Kante der Säule abstumpft, so bald die Sektionslinie im scharfen Winkel liegt (z. B. m im scharfen Winkel von PT), und die scharfe, so bald sie im stumpfen

(o' im stumpfen von PT). Ein anderer ausgezeichneter Punkt liegt ebenfalls in der Säulenfläche T auf der Hinterseite, der Kantenzonenpunkt ($\frac{1}{3}a' + \frac{1}{3}b'$); ihm entspricht symmetrisch der Kantenzonenpunkt ($\frac{1}{3}a' + \frac{1}{3}b$) in der Säule T; jeder wird 2ter Kantenzonenpunkt genannt, der durch vier Flächen $y\ n'\ o'\ T'$ und $y\ n\ o\ T$ vor allen ausgezeichnet ist. Auf der Vorderseite liegen wieder 2 Kantenzonen ($\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b$), durch 6 Flächen bezeichnet, die dritten Kantenzonenpunkte. Endlich sind in g und g' oben die Zonenpunkte mit einer zehnseitigen Säule nicht zu übersehen, die eine Zone von g nach $n z v' o'$ und von g' nach $n' z v o$ bezeichnen. Der unsymmetrisch liegenden Zonenpunkte in der Axe a sind ausser dem Mittelpunkte hauptsächlich drei bemerkenswerth.

Schon ein flüchtiger Blick zeigt, dafs die ganze Projektionsfigur zu den Seiten der Axe a durchaus symmetrisch ist; es finden sich auf der linken Seite ganz dieselben Zonenpunkte, wie auf der rechten. Die Bedeutung der Punkte auf den Krystallen wieder zu finden, ist ganz leicht, wenn man beherzigt, dafs jeder Punkt nichts weiter als den Zonenpunkt einer Säule darstellt. Um diese Säule am Krystall aufzusuchen, entfalte man in Gedanken die einzelnen Sektionslinien zu Krystallräumen, wodurch die Folge der einzelnen Flächen nicht geändert wird. Will ich daher z. B. die Zone des Punktes a' aufsuchen, so mufs ich mir irgend 2 Flächen aus dieser 12seitigen Säule verschaffen; hätte ich x und o, so gibt die Kante beider (x/o) die Richtung der gesuchten Säule an; folge ich dieser Richtung, so folgt s, dann M, s', o', bis ich zuletzt wieder nach x komme, die dem erstern x parallel geht, und gehe ich noch weiter, so komme ich nach o, s, M, s', o', die alle den vorigen gleiches Namens parallel gehen, bis ich dann zuletzt zu demselben x zurückkomme, von dem ich ausging. So verhält sich, um noch ein Beispiel zu geben, die 2te Kantenzone ($\frac{1}{3}a' + \frac{1}{3}b'$) im hintern linken

Quadranten. Gehe ich von der Säulenfläche T' aus, so komme ich über die stumpfe Kante nach y, dann über o', n' zu den Parallelen T', y, o', n', bis ich zuletzt wieder in demselben T' bin, von dem ich ausging.

Ausserdem ist die Figur sehr geeignet, die Sätze des §. 72 über die Kantenzonen in Anwendung zu bringen. Die Fläche o schneidet a' in $\frac{1}{1}$, sie liegt aber auch in der ersten Kantenzone $(\frac{a}{1} + \frac{b'}{1})$, daher mufs die Axe b' in $\frac{1}{1+1}$ geschnitten werden. Daraus ergibt sich der 2te Kantenzonenpunkt $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$. Fläche n hat $\frac{a}{1}$ und liegt in der 2ten Kantenzone $(\frac{1}{3}a' + \frac{1}{3}b)$, folglich wird die Axe b von ihr in $\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$ geschnitten, und der dritte Kantenzonenpunkt mufs $\frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$ sein. Alle Flächen, die durch den Kantenzonenpunkt $(\frac{a}{5} + \frac{b'}{5})$ gehen, schneiden die Axen so, dafs die Summe ihrer Nenner $= 5$ ist (das negative Vorzeichen aber wohl zu berücksichtigen!). Für n' ist $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1}$; für m' ist $\frac{1}{5} = \frac{1}{3+2}$; für t ist $\frac{1}{5} = \frac{1}{5+0}$; für s' ist $\frac{1}{5} = \frac{1}{6+(-1)} = \frac{1}{6-1}$; für r' ist $\frac{1}{5} = \frac{1}{8+(-3)} = \frac{1}{8-3}$. Um den Axenausdruck von o zu finden, welches in der 1sten und 2ten Kantenzone liegt, ist für die Axe b der Ausdruck $\frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$, für a' der Ausdruck $\frac{2}{3-1} = 1$. Fläche n liegt in der 2ten und 3ten Kantenzone, daher wird b unter $\frac{2}{3+5} = \frac{1}{4}$, und a unter $\frac{2}{5-3} = 1$ geschnitten; m in der 1sten und 3ten Kantenzone hat $\frac{2}{5+1}\ a = \frac{1}{3}\ a$

und $\frac{2}{5-1}\ b = \frac{1}{2}\ b$. Fläche v', in den Kantenzonen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{11}$, hat $\frac{2}{11+5}\ b = \frac{1}{8}\ b$, und $\frac{2}{11-5}\ a = \frac{1}{3}\ a$. Durch solche Gesetze ist das Auffinden der Axenverhältnisse zur einfachsten Addition und Subtraktion herabgesunken.

Ist uns auf diese Weise die Deduktion sämmtlicher Flächen gelungen, so kann man irgend ein anderes Oktaid wählen, ihm Axen unterlegen, und die Axenausdrücke der aus dem neu gewählten Oktaide deducirten Flächen bestimmen. In neuern Zeiten pflegt man häufig vom Oktaide $o\,o'\,m\,m'$ auszugehen.

Ein Blick auf die Sektionslinien dieser Krystallräume (Tab. III. Fig. 5.) zeigt, dafs die Sektionslinien M, k und P die zugehörigen Hexaidflächen bilden, denn sie verbinden je zwei Zonenpunkte des Oktaides. Geben wir daher dem Oktaide das Axenzeichen $\overline{\underline{/a : b : c/}}$, so erhalten die Hexaidflächen im Allgemeinen das Zeichen $\overline{\underline{/a : \infty b : \infty c/}}$. Von den Dodekaidflächen, welche die Hexaid- mit den Oktaidkantenzonen verbinden, sind nur drei (die Hälfte) vorhanden T, T' und x, ihr Axenausdruck bekommt das allgemeine Zeichen $\overline{\underline{/a : b : \infty c/}}$. Der Geübte schliefst diefs sogleich aus der Figur, dem Anfänger rathen wir jedoch, sich das zu Grunde gelegte Oktaid auf die Hexaidfläche P zu projiciren, in der Ebene P die Axen a und b zu ziehen, und c aufrecht zu denken. Dann wird er finden, dafs die Flächen

$$o = \overline{\underline{/a' : b : c/}}$$

$$m = \overline{\underline{/a : b : c/}}$$

$$P = \overline{\underline{/c : \infty a : \infty b/}}$$

$$M = \overline{\underline{/b : \infty a : \infty c/}}$$

$$k = \overline{\underline{/a : \infty b : \infty c/}}$$

$$T = \overline{\underline{/a : b : \infty c/}}$$

$$x = \overline{\underline{/a' : c : \infty b/}}$$

werden, wenn wir darunter zugleich die gestrichelten Buchstaben der Krystallräume mit einbegreifen, deren Sektionslinien auf der linken Seite liegen. Die Sektionslinien g und g' gehören dem Icositetraide $\overline{\underline{/a' : c : \frac{1}{2} b/}}$, denn sie verbinden die Dodekaidkantenzonenpunkte x/T' und x'/T mit den Oktaidkantenzonenpunkten m/o' und m'/o. Zwei Icositetraidflächen sind nur vorhanden, da die drei Dodekaidflächen so gegen einander liegen, dafs von ihren drei Kanten nur zwei Dodekaidkanten sind, die dritte Kante der Hexaidkantenrichtung entspricht. Auch vom Icositetraide $\overline{\underline{/a' : c : \frac{1}{3} b/}}$ bilden die s zwei Krystallräume. Vom Tetrakishexaid $\overline{\underline{/a : \frac{1}{2} b : \infty c/}}$ sind 4 Krystallräume vorhanden, nämlich:

$$k = \overline{\underline{/c : \frac{1}{2} b : \infty a/}}$$

$$n' = \overline{\underline{/c : \frac{1}{2} b' : \infty a/}}$$

$$y = \overline{\underline{/c : \frac{1}{2} a' : \infty b/}}$$

$$t = \overline{\underline{/c : \frac{1}{2} a : \infty b/}}.$$

Die Flächen z bleiben $= \overline{\underline{/a : \frac{1}{3} b : \infty c/}}$.

Fläche u wird $= \overline{\underline{/c : \frac{1}{2} a' : \frac{1}{2} b/}}$. Endlich $v' = \overline{\underline{/c : \frac{1}{2} a' : \frac{1}{4} b/}}$, die einzige Fläche, welche einem Hexakisoktaide angehört. Alle diese Axenschnitte leuchten ein, wenn man die Sektionslinien in die neue Projektionsfigur einträgt.

Noch einfacher werden die Axenverhältnisse, wenn wir vom Oktaide $o\,o'\,T\,T'$ ausgehen, alsdann bilden $M\,y\,P$ die drei zugehörigen Hexaidflächen, und $n\,n'\ u\,u'\ x\,k$ die zugehörigen Dodekaidflächen, so dafs die Zonenverhältnisse der drei einfachen Körper (des Oktaides, Hexaides und

Dodekaides) im Feldspathe enthalten sein müssen, daher bekommen diese Flächen die allgemeinen Ausdrücke

$$/\overline{a : b : c}/, \quad /\overline{a : \infty b : \infty c}/ \text{ und } /\overline{a : c : \infty b}/.$$

Aus der Kantenzone des Dodekaides ist keine Fläche aufgeführt, wohl aber sehen wir die Oktaidkantenzonen mit den Diagonalzonen des Oktaides (Zone der Dodekaid- und Oktaidfläche) verbunden, durch die Sektionslinien von $mgsz$, folglich bekommen die 8 diesen zugehörigen Krystallräume das allgemeine Zeichen $/\overline{a : \tfrac{1}{3}b : c}/$. Endlich die Flächen von v und t erhalten das Zeichen $/\overline{a : \tfrac{1}{2}b : \infty c}/$, so dafs wir durch die Wahl dieser Oktaide zu den möglichst einfachsten Flächenausdrücken gekommen sind. In Fig. 6. Tab. III. haben wir die Flächen sämmtlich auf P projicirt, in welcher neuen Projektionsfigur alle dieselben Zonenpunkte, die Sektionslinien in derselben Folge, zu finden sind, wie in Fig. 5. Man könnte an solche Figur manche Betrachtung knüpfen, z. B. die zu den 8 noch fehlenden vier Krystallräume hinzufügen, und die Axenschnitte dieser Krystallräume in Fig. 5. suchen. Das eine Paar der Krystallräume würde durch die Punkte b', $T.x$ und b, $T'.x$ gehen, hätte also den Ausdruck

$$\frac{1+1}{3+1}\,a' : \frac{1+1}{3-1}\,b : c = /\overline{\tfrac{1}{2}a' : b : c}/;$$

das andere Paar gienge durch b', $o.k$ und b, $o'.k$, erhielte also den Ausdruck $/\overline{\frac{1}{3+2}\,a' : \tfrac{1}{2}b : c}/ = /\overline{\tfrac{1}{5}a' : \tfrac{1}{2}b : c}/$,

die Ausdrücke $/\overline{\tfrac{1}{2}a' : b : c}/$ und $/\overline{\tfrac{1}{5}a' : \tfrac{1}{2}b : c}/$ beziehen sich nämlich auf die Axen in Fig. 5. Wären diese Flächen beobachtet, so hätten die Flächen den Zonen-Zusammenhang der Flächen

$$/\overline{a : b : c}/, \quad /\overline{a : \infty b : \infty c}/, \quad /\overline{a : b : \infty c}/ \text{ und } /\overline{a : \tfrac{1}{3}b : c}/,$$

wenn wir uns unter jedem Ausdrucke alle in den 8 Oktanten möglichen Krystallräume denken, also 4 + 3 + 6 + 12 Krystallräume.

Die drei Deduktionswege, welche wir jetzt eingeschlagen haben, haben mit einander gemein, dafs alle Krystallflächen symmetrisch zu den Seiten der *M* liegen. Man kann aber noch allgemeiner verfahren und irgend 4 Flächen herausgreifen, z. B. *T' P o' M* (Fig. I.). Ehe man deducirt, mufs man sich überzeugen, dafs die vier diesen zugehörigen Krystallräume wirklich ein Oktaid einschliessen. Die Flächen schliefsen allemal ein Oktaid ein, wenn sie 6 Zonen bilden, oder wenn nie je drei derselben in eine Zone fallen. Bei den gewählten vier Flächen ist dieses der Fall, denn *T'/P*, *P/o'*, *M/o'* und *M/T'* bilden unter sich jede eine andere Richtung; wir wollen diese als die vier Endkanten des Oktaides betrachten, alsdann sind *P/M* und *T'/o'* die Seitenkanten. Ein Blick auf die Projektionsfigur zeigt, dafs *n'*, *T* und *o* die zugehörigen Hexaidflächen sind. Es leuchtet diefs auch aus den Krystallen ein. Denn *n'* fällt in die Seitenkantenzonen *P/M* und *T'/o'*, weil es ein Parallelogram ist, das beider Kanten abstumpft; ebenso liegt *T* mit den Kanten *P/o'* und *T'/M*, und *o* mit den Kanten *P/T* und *M/o'* parallel. Die sechs Krystallräume, welche in die Würfel- und Oktaidkante fallen, also dem Dodekaide angehören, sind *n*, *s'*, *z*, *g'*, *m'* und *y*, so dafs wir auch in dieser Stellung die drei Körper Oktaid, Hexaid und Dodekaid wieder bekommen. Der weitere Verfolg der Deduktion ist ganz der obigen Weise analog.

Diese Beispiele werden hinreichen, um den Flächenzusammenhang beim Feldspath nach allen Seiten durchschauen zu können. Dafs es der Wege noch unendlich viele giebt, sieht man leicht aus den unendlichen Combinationen der Sektionslinien. So viele Oktaide es gibt, so viel Ausgangspunkte sind möglich. Nicht jedes Oktaid

führt aber zum Endzweck; es müssen nothwendig noch zwei zugehörige Hexaidflächen vorhanden sein. Wollte man z. B. vom Oktaide *uu′zz* ausgehen, so geht das nicht an, weil ausser *M* keine weitere zugehörige Hexaidfläche vorhanden ist. Die meisten Oktaide sind jedoch tauglich.

Hornblende.

Gehen wir (Tab. III. Fig. 9 und 10) vom Oktaide *Mxzr* aus (denn dieses ist ein Oktaid, weil es vier Endkanten *M/r*, *M/x*, *x/z* und *z/r* hat), so ist *c* die zugehörige Hexaidfläche, durch welche die Oktaidkanten *x/r* und *M/z* abgestumpft werden. Denken wir uns das Oktaid im Gleichgewicht, und projiciren es auf die ihm zugehörige Hexaidfläche, wie in Fig. 7 durch die gleichnamigen Sektionslinien geschehen; so ist die Fläche *M′* dann eine zweite zugehörige Hexaidfläche, denn sie geht den Oktaidkanten *M/x* und *z/r* parallel, ihre Reduktionsebene liegt also auf der Projektionsfigur in den diesen Kanten entsprechenden Richtungen. Fläche *P* ist die dritte zugehörige Hexaidfläche, den Kanten *M/r* und *z/x* parallel gehend. Die Fläche *r′* geht mit der Hexaidkante *P/M′* parallel, und zu gleicher Zeit mit der Oktaidkante *x/r*, sie ist also eine Dodekaidfläche. Der Oktaidkantenzonenpunkt *x/r* liegt im Unendlichen, wie die parallelen Sektionslinien *x* und *r* Fig. 7 zeigen, daher mufs die zugehörige Sektionslinie von *r* durch den Punkt *M.P* der *x* oder *r* parallel gehen. Die Fläche *q* stumpft die Hexaidkante *P/M′* ab, und liegt zugleich in den Seitenkanten des Oktaides *z/M*, sie ist also ebenfalls eine Dodekaidfläche. Fläche *q′* liegt in der Oktaidkante *M/r*, wie aus der Kantenparallelität von *q′* über *P* nach *r* und *M* folgt, und in der Oktododekaidkantenzone von *qx*, wie aus der Parallelität der Kanten von *q′qtx* folgt. Fläche *t* liegt in der Oktaidkante *z/r* und zugleich mit voriger *q′* in der Oktododekaidkante. Fläche *z′*

liegt in der Oktaidkantenzone z/x, und in der Zone M/r'. Fläche t' liegt in der Zone von q' nach q über t zum x und in der Zone von z'/r'. Endlich liegt Fläche c' in der Oktaidkantenzone r/x und in der Zone M'/z'.

Vergleichen wir, nachdem die Flächen sämmtlich projicirt sind, die Projektionsfigur mit dem Krystalle, so wird jede Kantenparallelität des Krystalls durch einen Zonenpunkt in der Projektionsfigur veranschaulicht sein, so viel Säulen, so viel Zonenpunkte. Suchen wir z. B. die Seitenkantenzonen des Oktaides, so sehen wir die Sektionslinien der Flächen $x c' r' r$ einander parallel gehen, also eine Zone andeuten, zu welcher auch die Projektionsebene c gehört; eben so bilden $M q z$ die zweite, zu welcher gleichfalls die Projektionsfläche c gehört. Die Endkantenzonenpunkte des Oktaides von M nach $r\,P$ und q', von r nach $z\,t\,M'$, von x nach $z\,P\,z'$ und von M nach $x\,M'$ entsprechen sich genau in den Figuren, so auch die Diagonalkantenzonen des Oktaides $x\,t\,q\,q'\,t'$ und $M\,r'\,z'\,t'$. Schnitte, die im Krystalle nicht sichtbar sind, treten durch die Sektionslinien hervor.

Um den Deduktionszusammenhang der Flächen fest zu halten, beziehen wir sie auf Axen; von der Wahl der Oktaidaxen hängt alles ab. Die Axe c denken wir uns aufrecht, durch deren Einheitspunkt alle Ebenen gelegt sind, sie gehe durch den Mittelpunkt o, lassen wir die beiden andern Axen die Linien oa, oa', ob, ob' sein, so ergeben sich folgende Axenausdrücke:

$r = \overline{\underline{/a : b : c/}}$ Oktaidfläche,

$M = \overline{\underline{/a : b' : c/}}$ desgl.

$x = \overline{\underline{/a' : b' : c/}}$ desgl.

$z = \overline{\underline{/a' : b : c/}}$ desgl.

$P = \overline{\underline{/b : \infty a : \infty c/}}$ Hexaidfläche,

$M' = \overline{\underline{/a : \infty b : \infty c/}}$ Hexaidfläche,

$c = \overline{\underline{/c : \infty a : \infty b/}}$ desgl.

$q = \overline{\underline{/a : b' : \infty c/}}$ Dodekaidfläche,

$r' = \overline{\underline{/a : b : \infty c/}}$ desgl.

$t = \overline{\underline{/b : c : \tfrac{1}{3}a'/}}$ Icositetraidfläche,

$q' = \overline{\underline{/a : \tfrac{1}{3}b' : c/}}$ desgl.

$z' = \overline{\underline{/a' : \tfrac{1}{3}b' : c/}}$ desgl.

$t' = \overline{\underline{/c : \tfrac{1}{2}b' : \infty a/}}$ Tetrakishexaidfläche,

$c' = \overline{\underline{/c : \tfrac{1}{3}a' : \tfrac{1}{3}b/}}$ Triakisoktaidfläche.

Die Einfachheit der Ausdrücke ist auch hier, wie beim Feldspath, sehr erfreulich. Ganz anders lauten diese Ausdrücke, sobald wir die Axe c beibehalten, aber die Axen $o\,\alpha$, $o\,\alpha'$, $o\,\beta$, $o\,\beta'$ als Seitenaxen wählen; alsdann wird

$r = \overline{\underline{/\alpha : c : \infty\beta/}}$ Dodekaidfläche,

$M = \overline{\underline{/\beta : c : \infty\alpha/}}$ desgl.

$x = \overline{\underline{/\alpha' : c : \infty\beta/}}$ desgl.

$z = \overline{\underline{/\beta' : c : \infty\alpha/}}$ desgl.

$P = \overline{\underline{/\beta : \alpha' : \infty c/}}$ desgl.

$M = \overline{\underline{/\alpha' : \beta' : \infty c/}}$ desgl.

$q_{,} = \overline{\underline{/\beta : \infty\alpha : \infty c/}}$ Hexaidfläche,

$r' = \overline{\underline{/\alpha : \infty\beta : \infty c/}}$ desgl.

$c = \overline{\underline{/c : \infty\alpha : \infty\beta/}}$ desgl.

$t' = \overline{\underline{/\alpha' : \beta : c/}}$ Oktaidfläche,

$c' = \overline{\underline{/c : \frac{1}{3}\alpha' : \infty\beta/}}$ Tetrakishexaidfläche,

$t = \overline{\underline{/c : \alpha' : \frac{1}{2}\beta'/}}$ Icositetraidfläche,

$q' = \overline{\underline{/c : \alpha' : \frac{1}{2}\beta/}}$ desgl.

$z' = \overline{\underline{/c : \beta : \frac{1}{2}\alpha/}}$ desgl.

Wir haben in der Projektionsfigur die Sektionslinien nicht sehr weit ausgedehnt, weil die kleine Zeichnung schon hinreicht, alle Hauptverhältnisse des Krystalles genau einzusehen. Würden wir die Sektionslinien verlängern, so würden nur noch vierseitige Säulen zum Vorschein kommen, die man indessen schon aus der Figur erschliefsen kann, da jede Linie jede schneiden mufs; demnach ist jede Ausdehnung überflüssig.

Unser Zweck, alle Flächen aus einem beliebigen zu Grunde gelegten Oktaide zu entwickeln, ist vollkommen erreicht. Allein wir haben eine sehr ungewöhnliche Stellung gewählt. Jedoch den Krystall in jede andere Stellung zu bringen, ist sehr leicht. Es fällt sogleich bei näherer Betrachtung auf, dafs alle Flächen gegen die P symmetrisch liegen, und die Flächen M zur Säule ausgedehnt sind. Daher wollen wir vom Oktaide $r\,r'\;q\,q'$ ausgehen, zu welchem P die zugehörige Hexaidfläche ist, weil sie die Kanten q/r' und q'/r abstumpft, die Oktaidflächen auf die P projiciren (Tab. III. Fig. 8), und ihnen die Axen a und b unterlegen, welche die gegenüberstehenden Seitenecken des Oktaides verbinden (sobald das Oktaid im Gleichgewicht ist!). Unter dieser Voraussetzung ist Sektionslinie

$$q = \overline{\underline{/a : b/}},\ q' = \overline{\underline{/a : b'/}},\ r = \overline{\underline{/a' : b/}},\ r' = \overline{\underline{/a' : b'/}};$$

aus der Sektionslinie ergibt sich aber unmittelbar der Ausdruck der zugehörigen Flächen, da alle Flächen durch den

gemeinsamen Punkt c gehen. Fläche x geht den zwei gegenüberliegenden Endkanten des Oktaides r/r' und q/q' parallel, folglich ist Axe a die ihr zugehörige Sektionslinie. Allein, um weiter fortzuschreiten, fehlt uns eine Fläche. Denn ob wir gleich ein Oktaid mit zwei zugehörigen Hexaidflächen (also den Zonenzusammenhang des Dodekaides) haben, und nach §. 75 eine vollständige Deduktion möglich ist, so ist es doch nur möglich, wenn der abgeleitete Kantenzonenpunkt des Hexaides mit den noch nicht verbundenen Oktaidkantenzonen verbunden wird. Diese scheinbare Schwierigkeit besiegen wir leicht, wenn wir in unserm gewählten Oktaide $q\,q'\ r\,r'$ (Fig. 7) die dritte Hexaidfläche (deren Sektionslinie unserer Axe b entspricht) noch ziehen, dann sehen wir, dafs dieselbe durch die Zonenpunkte Mx und rq gehen mufs. Daraus folgt, dafs M in die Hexaidkantenzone fällt, welche Fig. 8 im Mittelpunkte liegt; M liegt aber ausserdem in der Oktaidkantenzone r/q': folglich geht ihre Sektionslinie, der $q'...q'$ und $r...r$ parallel, durch den Mittelpunkt der Construktion, und schneidet, parallel mit sich verrückt, die Axen a und b in der Gleichheit, also Sektionslinie $M = \overline{\underline{/a:b'/}}$; ebenso findet sich $M' = \overline{\underline{/a:b/}}$, da sie gleichfalls in der Hexaidkantenzone liegt, und der Oktaidkante q/r' parallel geht. Fläche z fällt in q/M und r/M', folglich $z = \overline{\underline{/\tfrac{1}{2}b:\infty a/}}$; z' in Zone q'/M' und r'/M, folglich $z = \overline{\underline{/\tfrac{1}{2}b':\infty a/}}$; c fällt in q/M und x/r, folglich $c = \overline{\underline{/a':\tfrac{1}{3}b/}}$; c' fällt in Zone q'/M' und x/r', folglich $c' = \overline{\underline{/a':\tfrac{1}{3}b/}}$; t in Zone q/x und M'/r, folglich $t = \overline{\underline{/a:\tfrac{1}{3}b/}}$; t' in q'/x und M/r', folglich $t' = \overline{\underline{/a:\tfrac{1}{3}b'/}}$. Hiermit ist die Aufgabe völlig gelöst, den Zonenzusammenhang sehen wir in beiden Projektionsarten unverändert.

Beide Oktaide dieser Projektionsarten haben solche Winkel, dafs sich ihre drei Axen unter schiefen Winkeln schneiden. Der Krystallograph zieht jedoch immer rechtwinkliche Axen den schiefwinklichen vor. Man kann der Hornblende wirklich 3 rechtwinkliche Axen unterlegen, sobald die Flächen

$$P = \overline{\underline{/a : c : \infty b/}}, \quad M = \overline{\underline{/a : b' : \infty c/}}, \quad M' = \overline{\underline{/a' : b' : \infty c/}}$$

werden. Soll dieses Statt finden können, so müssen sich die drei Flächen M, M', P auf ein Axenkreuz ab beziehen, wie in Tab. III. Fig. 11, wenn wir nur unter ob die Axeneinheit b, unter oa die Axeneinheit a verstehen. Um nun zur Deduktion fortschreiten zu können, nehmen wir die Kante r'/r zu Hülfe (§. 78). Da die Projektionsebene eine beliebige ist, so wählt man sie so, dafs der Zonenpunkt von r'/r in den Axenpunkt a' fällt, also von o um die Axeneinheit a entfernt, d. h. $ao = a'o$ ist. Messen wir unter dieser Voraussetzung die Winkel, so findet sich Axe c auf der Projektionsebene senkrecht. Die Fläche r fällt nun, ausser dafs sie in der Zone r'/r liegt, noch in die Kantenzone P/M, also:

$r = \overline{/a' : \frac{1}{2}b : c/}$ ebenso

$r' = \overline{\underline{/a' : \frac{1}{2}b' : c/}}$ in r'/r und P/M' gelegen.

$x = \overline{\underline{/b : \infty a : \infty c/}}$ in r'/r und M'/M —

$z = \overline{\underline{/a : \frac{1}{4}b : c/}}$ in P/x und M'/r —

$z' = \overline{\underline{/a : \frac{1}{4}b' : c/}}$ in P/x und M/r' —

$c = \overline{\underline{/a' : \frac{1}{6}b : c/}}$ in M/z und r'/r —

$c' = \overline{\underline{/a' : \frac{1}{6}b' : c/}}$ in M'/z' und r'/r —

$g = \overline{\underline{/\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c/}}$ in P/M und z/c —

$q' = /\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}b' : c/$ in P/M und z'/c' gelegen.

$t = /\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{6}b : c/$ in M'/z und q/x —

$t' = /\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{6}b' : c/$ in M/z' und q/x —

Das System ist dadurch dem Feldspath ganz analog geworden, wie Professor Weiss zuerst nachgewiesen hat; daher finden auch die Zonenpunktgesetze hier eine sehr bequeme Anwendung.

Weiſsbleierz.

Wir wollen nur an einem ganz einfachen Krystalle die groſse Mannigfaltigkeit von möglichen Ansichten und Stellungen kurz andeuten.

Der vorliegende Krystall (Tab. III. Fig. 12) besteht aus einer geschobenen vierseitigen Säule $M'M$, deren scharfe Kante durch den Krystallraum l abgestumpft wird. Wir erhalten dadurch eine sechsseitige Säule. Zwei Zuschärfungspaare yy' und $s's$ sind auf die scharfe und stumpfe Säulenkante aufgesetzt, so daſs je drei Krystallräume Mys, Mys', Msy', $M's'y'$, $ls's$ und $M'Ml$ eine sechsseitige Säule bilden, also in einer Zone liegen. Um einem solchen Krystalle Axen unterzulegen, müssen wir irgend ein Oktaid wählen, z. B. $ysy's'$ (denn diese vier Krystallräume schlieſsen ein Oktaid mit 6 Zonen ein, fünf: y/s, y/s', y'/s, y'/s', s'/s, sind davon sichtbar, die sechste würden yy' unter sich bilden), und diesem irgend einfache Axen unterlegen. Würden wir uns das gewählte Oktaid im Gleichgewicht denken, und durch das Axenkreuz die Ecken des Oktaides mit einander verbinden, so würden die Flächenausdrücke

$$y = /a : b : c/, \quad s = /a' : b : c/,$$

$$y' = /a' : b' : c/, \quad s' = /a : b' : c/$$

sein. Es fällt nun aber die Fläche M in die Oktaidkantenzone y/s' und y'/s, folglich ist sie Hexaidfläche; ebenso M' in die Oktaidkantenzonen y/s und y'/s'. Daraus ergeben sich

$$M = \overline{/b : \infty a : \infty c/} \text{ und } M' = \overline{/a : \infty b : \infty c/}.$$

Es bilden also die zwei Hexaidflächen $M'M$ unter sich eine Hexaidkante, welcher l parallel geht, ausserdem geht aber l auch der Oktaidkante s'/s parallel, sie liegt also auf der Projektionsfigur in der Oktaid- und Hexaidkante, ist daher eine Dodekaidfläche mit dem Ausdrucke

$$l = \overline{/a : b' : \infty c/}.$$

Hiermit ist der Zusammenhang der Flächen vollkommen gekannt.

Gewöhnlich pflegt man diesem Krystalle andere Axen unterzulegen. Man schreibt:

$$y = \overline{/a : c : \infty b/}, y' = \overline{/a' : c : \infty b/}, s = \overline{/b : c : \infty a/}, s' = \overline{/b' : c : \infty a/}.$$

In diesem Falle ist die Hauptaxe c dieselbe geblieben, die beiden Nebenaxen a und b verbinden die Mitten der Seitenkanten (§. 62.). Sobald die vier Oktaidflächen auf diese Weise willkührlich bestimmt sind, müssen die Axenausdrücke der übrigen Flächen folgen. M und M' als zugehörige Hexaidfläche des Oktaides $y s y' s'$ bekommen das Zeichen

$$M = \overline{/a : b : \infty c/}, \quad M' = \overline{/a : b' : \infty c/},$$

ganz wie in §. 62 gelehrt ist; denn man darf das Oktaid nur projiciren und ihm die obigen Axen unterlegen. Die Dodekaidfläche l erhält jetzt aber den Ausdruck

$$l = \overline{/b : \infty a : \infty c/}.$$

Man sieht dieses unmittelbar aus dem Krystall. Denn da s' und s beide der Axe parallel gehen, so mufs auch ihre gemeinsame Kante s'/s der Axe a parallel gehen; ebenso gehen M' und M der Axe c parallel, also entspricht ihre Kante der Axe c; Fläche l geht aber den Kanten s'/s und M'/M parallel, also auch den Axen a und c, wie der Aus-

druck sagt. Aus dem Zeichen folgt, dafs $y s\ y' s'\ M M'$ für sich ein Dodekaid bilden. Es folgt diefs schon aus den vier sechsseitigen Säulen $M' y s$, $M' s' y'$, $M y s'$ und $M s y'$.

Gehen wir nun von dem ganz andern Oktaid $s s' M' M$ aus, in welchem s'/s, s/M, s'/M', M'/M, M'/s und M/s' die Kanten sind, so fällt y in die zwei Oktaidkantenzonen M'/s und M/s'; y' in M/s und M'/s'; l in M/M' und s'/s, daher sind $y y' l$ die drei zugehörigen Hexaidflächen des Oktaides $s s' M M'$, der einfachste Flächenzusammenhang.

Giengen wir vom Oktaide $s l M y$ aus, so sind s/l, M/l, M/y, s/y, M/s und y/l die sechs Kanten, s' liegt in s/l und M/y, M' in M/l und s/y, sie sind daher Hexaidflächen; y' aber liegt in der Oktaidkante M/s und in der Hexaidkante M'/s', ist also Dodekaidfläche. So schief diese Stellung ist, so einfach wird die Entwickelung der Flächen.

Bei der Wahl des Oktaides mufs man sich stets überzeugen, dafs die vier gewählten Flächen auch wirklich ein Oktaid und keinen Vierzonenkörper bilden. Ein Oktaid ist es stets, wenn keine sechsseitige Säule unter den vier gewählten Flächen sich befindet. Wollte man z. B. $s y M' M$ wählen, so gienge das nicht an, denn die Flächen $s y M'$ bilden eine sechsseitige Säule, alle vier einen Vierzonenkörper.

Unser einfacher Weifsbleierzkrystall hat nicht mehr, als 7 Krystallräume, und dennoch bieten diese wenigen so reichlichen Stoff zur Uebung dar! Da man aus 7 Flächen

$\frac{7.\ 6.\ 5.\ 4.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} = 35$ Mal je vier verschiedene herausgreifen

kann, so würden darin 35 Oktaide stecken. Allein es sind darunter auch Vierzonenkörper enthalten. Denn wir sahen, dafs die 6 Krystallräume $s y s' y' M' M$ ein Dodekaid bilden, worin vier sechsseitige Säulen ($M y s'$, $M s y'$, $M' y s$, $M' s' y'$) stecken; ausserdem macht l mit $M M'$ und $s' s$ noch zwei: so dafs diese $4 + 2 = 6$ sechsseitige Säulen, mit je einer vierten Fläche verbunden, kein Oktaid geben können. Jede sechsseitige Säule kann aber mit je 4 noch übrigen

Flächen verbunden werden, also müssen diese zusammen $4 . 6 = 24$ Vierzonenkörper bilden, welche in Abzug zu bringen sind. Mithin blieben $35 - 24 = 11$ verschiedene Oktaide möglich. So viel Oktaide, so viel verschiedene Axen! Ein reicher Uebungsstoff für den Anfänger!

Aber wir sind nun nicht blofs genöthigt, von einem Oktaide auszugehen, sondern wir können auch ein beliebiges Hexaid nebst einer Zonenrichtung, die nicht dem gewählten Hexaide angehört, zu Grunde legen (§. 78). Würden wir hierzu das Hexaid $M l s$ wählen, das in einer vierseitigen Säule $M l$ mit einer doppelt schiefen Endfläche s erscheint, und hierzu noch die durch die Kante y'/s' bestimmte Richtung, so ist eine Deduktion möglich. Denn wir projiciren uns das Hexaid mit der gewählten Richtung dergestalt gegen drei Axen $a b c$, dafs $s = |a : c : \infty b|$, $l = |a : b : \infty c|$, $M = |a : b' : \infty c|$, und die Richtung $y'/s' = |a' : c|$ wird. Alsdann liegt s' in der Richtung y'/s' und in der Hexaidkantenzone s/l, daher $s' = |a' : \frac{1}{2}b' : c|$; ebenso y' in y'/s' und M/s, also $y' = |a' : \frac{1}{2}b : c|$; M' liegt in Kante M/l und in Kante y'/s', also $M' = |b : \infty a : \infty c|$. Die Flächen $M l s y' s'$ verhalten sich in Hinsicht auf ihren Zonenzusammenhang ganz wie die Hornblendeflächen $M' M P r' r x$, sie bilden unter sich ein Dodekaid, wie die vier sechsseitigen Säulen ($M' M l$, $M s y'$, $l s s'$, $M' s' y'$) beweisen. Endlich liegt die Fläche y in den Kanten s'/M und M'/s, also $y = |a : \frac{1}{4}b' : c|$. Wir ersehen daraus die grofse Analogie unserer Flächen mit Hornblende und Feldspath, es sind hier dieselben Zonenverhältnisse und Flächenentwickelungen, wie dort.

Diese wenigen Beispiele mögen zum Beweise genügen, dafs es die Hauptaufgabe einer gründlichen Krystallographie sein mufs, den einfachen Flächenzusammenhang überall

wieder aufzufinden. Alsdann wird sich der Krystallograph bald über jene trockne Formbeschreibung erheben, die sich nie der Gründe bewufst ist, sondern nur durch mühsamen Vergleich mit Holzmodellen die Natur unvollkommen zu entziffern sucht. Wer einmal erst so weit eingedrungen ist, dafs er den Geist der Weifsischen Deduktionslehre, die wir hier, wenn freilich in einer eigenthümlichen Form, wiedergegeben haben, zu durchschauen beginnt, der wird auch bald erkennen, dafs zur Zeit ausser dieser Methode kein anderer Weg so leicht und vollkommen zum Ziele führen kann, als dieser.

B.

Systematik.

§. 1.

Die Systematik führt in die mathematisch möglichen Verbindungen von Krystallräumen das Princip der Gleichheit und Ungleichheit ein.

Im Buche über die Zonenlehre haben wir niemals von Gleichheit und Ungleichheit der Krystallräume gesprochen, sondern wir haben nur die räumlichen Gestalten entwickelt, wie sie nothwendig aus einander folgten, abgesehen von allen besondern Eigenschaften. Aber wenn wir gleich von diesen Eigenschaften absahen, so sind unsere dort aufgeführten Gestalten dennoch nicht etwa mathematische Abstraktionen, sondern wirkliche, in den meisten besondern Systemen wieder gefundene Formen. In der Zonenlehre wurden die Krystallräume nur nach ihren mathematisch möglichen Verbindungen betrachtet. Diese Betrachtung gilt auch noch in der Systematik, aber es kommt noch eine zweite hinzu, die Betrachtung nach der *Gleichheit* oder *Ungleichheit* der einzelnen Krystallräume.

§. 2.

Die Gleichheit und Ungleichheit ist mathematisch oder physikalisch, daher gibt das Princip einen vierfachen Eintheilungsgrund.

Betrachte ich z. B. zwei Krystallräume eines Oktaides im Gleichgewicht (A. §. 41.), so kann ich von zwei anliegenden Dreiecken sagen, sie seien mathematisch *kongruent* oder *nicht kongruent*. Sind sie

a) *kongruent,* so können sie noch

1) physikalisch gleich oder

2) physikalisch ungleich sein.

Sind sie

b) *nicht kongruent,* so können sie ebenfalls

3) physikalisch gleich oder

4) physikalisch ungleich sein.

Oftmals werden zwar die Fälle in zwei zusammen fallen, jedoch müssen wir sie dennoch im Allgemeinen unterscheiden. Wie die physikalischen Eigenschaften, die wir nach ihrer Gleichheit oder Ungleichheit betrachten, weiter beschaffen sein mögen, ist eine Frage, die die Krystallographie nicht zu beantworten braucht. Meistens beruhen die Eigenschaften auf der Art des Glanzes: ob die Flächen zweier Krystallräume gleich oder ungleich matt; ob sie gleich oder ungleich glänzend; ob eine matt, die andere glänzend; ob sie gleich oder ungleich blättrig etc. sind. Solches alles wird in der Mineralogie gelehrt.

§. 3.

Jeder Krystallraum kann in sich physikalisch gleich oder ungleich sein.

In der Zonenlehre (A. §. 2. bis §. 4.) haben wir den Krystallraum nach seiner absoluten Gleichheit betrachtet; und *mathematisch* genommen kann auch wirklich auf den Krystallraum das Princip der Gleichheit und Ungleichheit nicht angewendet werden. Er ist bei der Beweglichkeit seiner Gränzebenen in jedem Punkte absolut derselbe. *Physikalisch* genommen bleibt der Satz nicht wahr, sondern wir finden schon in einem einzigen Krystallraum der natürlichen Krystalle sehr häufig eine Differenz ausgesprochen. Denken wir uns in einem solchen Krystallraume einen Punkt o, legen durch ihn eine Linie, so schneidet diese gehörig verlängert beide Gränzebenen des Krystallraumes. Nun, meine ich, finden wir häufig, dafs diese Linie von o aus nach der einen Richtung eine andere Beschaffenheit zeige, als sie von demselben o nach der andern Richtung zeigt. Man sagt, die Linie sei eine polare. Wenn das eine Ende positiv, so ist das andere negativ elektrisch oder magnetisch etc.; oder wenn die eine Gränzfläche des Krystallraumes matt ist, so ist die Parallele glänzend, oder wohl gar gesetzlich nicht vorhanden. Solche Verhältnisse sind beim Turmalin, Boracit etc. be-

kannt, finden überhaupt bei allen geneigtflächig hemiedrischen Körpern Statt. Es ist gar nicht unwahrscheinlich, dafs alle Krystallräume sich so verhalten, man könnte im Grunde genommen defshalb nicht sagen, die gegenüberliegenden Theile des Krystalles seien unter sich physikalisch gleich, sondern nur mathematisch. Burhenne in seinen Raumgestalten hat darauf ganz besonders verwiesen, und dieses in einer Reihe scharfsinniger, aber sehr verwickelter Sätze dargestellt. Wir wollen jedoch für den Augenblick darauf nicht Rücksicht nehmen, sondern vorläufig diefs *Princip der Polarität* vernachlässigen.

§. 4.

Der Querschnitt eines Krystallraumes ist von zwei parallelen Linien begränzt.

Es folgt dieser Satz unmittelbar aus A. §. 14, denn man darf die Fläche des Querschnittes nur als die Gränzfläche des zweiten Krystallraumes betrachten. Ueberhaupt ist kein Querschnitt am Krystallraume denkbar, dessen Begränzungslinien nicht parallel giengen.

§. 5.

Jeder Querschnitt der vierseitigen Säule ist ein Parallelogramm, und steht der Querschnitt senkrecht auf die Säulenzone, so sind die Winkel des Parallelogrammes den Säulenwinkeln gleich.

Dafs der Querschnitt ein Parallelogramm wird, folgt aus vorigem Paragraph. Denn was für einen Krystallraum gilt, gilt für alle. Die Neigung zweier Flächen $a\,b$ wird aber durch den Linienwinkel gemessen, welchen eine dritte Ebene c mit der a und b macht, wenn die c auf den gemeinschaftlichen Durchschnittslinien von a und b (d. h. der Säulenaxe) senkrecht steht. Daher müssen auch die Säulenwinkel mit den Winkeln des Durchschnittsparallelogrammes übereinstimmen.

Zusatz. Der Satz läfst sich auf 6-, 8- und $2n$seitige Säulen leicht ausdehnen. Wir bekommen dann ein 6-, 8-

und 2*n*eck, in denen je zwei Seiten mit einander parallel sind, und steht der Querschnitt senkrecht auf die Zonenaxe, so stimmen die Winkel dieser Ecke mit den Säulenwinkeln respective überein.

§ 6.

Parallelogramme sind gleichwinklich oder ungleichwinklich, d. h. recht- oder schiefwinklich; daher giebt es auch nur rechtwinkliche oder schiefwinkliche vierseitige Säulen.

Der Satz über die Parallelogramme ist an sich klar, daraus ergeben sich aber auch die Säulen. Denn ob der Säulenwinkel viele oder wenige Grade hat, ist für die Systematik gleichgültig.

§. 7.

Nach der physikalischen Beschaffenheit gibt es rechtwinklich gleiche und rechtwinklich ungleiche; ferner schiefwinklich gleiche und schiefwinklich ungleiche vierseitige Säulen.

Ausser diesen vier Fällen ist kein anderer möglich. Denn sind zuerst *alle Winkel gleich,* d. h. sämmtlich *rechte,* so können die Krystallräume beide unter sich *physikalisch gleich* oder *ungleich* sein; sind sie gleich, so bekommen wir die *rechtwinklich gleiche Säule,* die man auch wohl *quadratische, viergliedrige Säule* nennt, und was der Namen mehr sind. Der Ausdruck *rechtwinklich* bezieht sich auf die Winkel, und der Zusatz *gleich* auf die physikalische Beschaffenheit der Säule. Die *rechtwinklich ungleiche* Säule (breite rechtwinkliche Säule) ergiebt sich daher von selbst; das *ungleich* bedeutet nämlich, dafs beide Krystallräume physikalisch verschieden sein sollen. Wenn der eine blättrig ist, ist der andere wenig oder doch verschieden blättrig, kurz die Eigenschaften beider stimmen nie mit einander überein. Die *schiefwinklich gleiche vierseitige Säule* (geschobene Säule) bedeutet eine Säule mit schiefen Winkeln, aber physikalisch gleich beschaffe-

nen, die *schiefwinklich ungleiche* mit ungleichen Krystallräumen.

Zusatz. Dafs in der vierseitigen Säule nur zweierlei Winkel sind, folgt unmittelbar aus dem Parallelogramme, und ist auch schon oben erörtert. Die verschiedenen Namen der einzelnen Säulen aufzuführen, ist ganz zweckwidrig für den Anfänger.

§. 8.

Nach der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel giebt es dreierlei sechsseitige Säulen:

1) *die ungleichwinkliche sechsseitige Säule, worin alle drei Winkel verschieden;*

2) *die zwei- und einwinkliche, worin zwei Winkel gleich; und*

3) *die gleichwinkliche, worin alle drei Winkel gleich sind.*

Denken wir uns den Querschnitt (Taf. II. Fig. 10) der sechsseitigen Säule, so sind nur vorstehende drei Fälle möglich. Sind die drei Winkel gleich, so ist jeder Winkel 120°, man nennt die Säule daher auch wohl die reguläre sechsseitige. Sind zwei Winkel gleich, so können diefs keine andern, als zwei anliegende sein. Solche Säule nennt man auch eine geschobene vierseitige Säule mit grade abgestumpfter Kante, weil die dritte Fläche die stumpfe Kante α' der Säule $\alpha' \alpha$ (Tab. IV. Fig. 12.) so abstumpft, dafs sie mit den beiden andern Flächen gleiche Winkel $\beta = \beta$ bildet. Sind endlich alle drei Winkel ungleich, so stumpft die dritte Fläche die Kante der beiden übrigen *schief ab,* weil jetzt die ihr anliegenden Winkel nicht mehr unter sich gleich sind.

Zusatz. Man könnte diesen Satz auf 8-, 10- und $2n$ flächige Säulen ausdehnen wollen. Jedoch kämen wir hier in eine zu grofse Zerspaltung, die wenig Nutzen bringt, da später sämmtliche Säulen unter andern Gesichtspunkten aufgefafst werden.

§. 9.

Nach der Gleichheit und Ungleichheit der Krystallräume giebt es ebenfalls dreierlei sechsseitige Säulen: gleichflächige, zwei- und einflächige und ungleichflächige. Doch fallen diese mit den nach den Winkeln eingetheilten Säulen zusammen.

Es wird uns in der Systematik häufig begegnen, dafs wir das physikalische und mathematische Princip nicht gegenseitig subordiniren dürfen, wie hier. Eigentlich müfsten wir (analog §. 7, worin 2 . 2 = 4) jetzt 3 . 3 = 9 verschiedene Säulen bekommen.

1) Alle Winkel gleich, folglich jeder 120°. Hier gäbe es nun 3 Abtheilungen:
   a) alle Krystallräume physikalisch gleich; giebt die *reguläre sechsseitige Säule;*
   b) zwei Krystallräume gleich vom dritten verschieden. Dieser Unterfall ist noch nicht vorgekommen, sondern es scheint dieser Fall von der Natur gänzlich ausgeschlossen zu sein, für welche Erscheinung wir später die Gründe finden werden; ebenso
   c) wo alle 3 Krystallräume verschieden sind.
2) Zwei Winkel gleich vom dritten verschieden:
   a) alle Krystallräume gleich. Auch dieser Fall ist ausgeschlossen;
   b) zwei gleich vom dritten verschieden. Die Krystallräume liegen dann stets so, dafs die Gränzflächen der gleichen Krystallräume den ungleichen Winkel α (Tab. IV. Fig. 12) einschliefsen. Der dritte ungleiche Krystallraum stumpft stets die Säulenkanten α' der beiden gleichen grade ab. Daher nennt man eine solche sechsseitige Säule eine *geschobene vierseitige* (schiefwinklich gleiche) *mit abgestumpfter Kante.* Der Fall
   c) alle 3 Krystallräume ungleich, ist hier ebenfalls nicht möglich. Endlich kommt

3) wo alle 3 Winkel ungleich sind. Hier sind die Fälle a und b ausgeschlossen, und nur der Fall

c) vorhanden, wo alle 3 Krystallräume verschieden sind.

Zusatz 1. Auch diesen Satz könnten wir auf $2n$ flächige Säulen ausdehnen.

Zusatz 2. Wenn wir sagen, eine Form sei krystallographisch ausgeschlossen, so haben wir dabei immer eine bestimmte symmetrische Stellung des Krystalles (A. §. 52, §. 62 und 63) im Auge. Im Grunde genommen kommen alle jene Unterabtheilungen vor; allein man ist aus später beim Oktaide zu entwickelnden Gründen (von §. 13 an) gewohnt, die Säulenflächen in einer andern Gruppirung zu nehmen.

§. 10.

Das Hexaid (Tab. IV. Fig. 13) kann nach den Winkeln seiner drei Säulen mathematisch in sieben Unterabtheilungen gebracht werden.

Da wir bei der Eintheilung der Säulen ein für alle Mal nur auf die Gleichheit und Ungleichheit der Säulenwinkel Rücksicht nehmen wollen, so sind nur zwei Abtheilungen von vierseitigen Säulen möglich: die *rechtwinkliche* und die *schiefwinkliche*. Daher folgende Fälle:

1) *Alle drei Säulen (ab, ac, bc, Fig. 13) unter sich gleich und rechtwinklich.*

Von der Rechtwinklichkeit der 12 Säulenwinkel ($\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$) hängt nothwendig ab, dafs die drei verschiedenen Richtungen (α, β, γ) ebenfalls auf einander rechtwinklich stehen, d. h. alle Hexaidflächen Rechtecke sind.

2) *Alle drei Säulen unter sich gleich und schiefwinklich.*

Jede vierseitige Säule hat zweierlei Winkel α und α', wo $\alpha + \alpha' = 180^0$. Da wir aber drei Säulen haben, so haben wir drei gleiche α und drei gleiche α'. Es sind demnach in diesem Hexaide stets zwei sich gegenüberliegende Eckpunkte vorhanden, in welchen sich drei gleiche

Kanten treffen, z. B. α'. Stellen wir diese Ecken aufrecht, so liegen die andern drei α (d. h. mit ihren Parallelen sechs) seitlich in einer Zickzacklinie. Die Flächen des Körpers sind 6 Rhomboide, von denen jedes dieselben Winkel hat.

3) *Zwei Säulen unter sich gleich und rechtwinklich, die dritte aber schiefwinklich.*

Es mögen von den drei Krystallräumen a, b und c, und den zwischenliegenden Kanten α, β und γ, a mit b und a mit c eine rechtwinkliche Säule bilden, b mit c eine schiefwinkliche. Stellen wir dann die eine Säule $a\ b$ aufrecht, so bildet c *eine Schiefendfläche an der Säule, welche an die Fläche b schief angesetzt ist* (unter einem schiefen Winkel), aber *grade aufgesetzt*, d. h. die mit den Gränzflächen des Krystallraumes a gleiche Winkel macht. Zwei Kanten $\gamma\alpha$ und $\alpha\beta$ bleiben noch auf einander senkrecht, während $\beta\gamma$ auf einander schief stehen. Noch einfacher würde man dieses Hexaid als eine geschobene Säule $b\ c$ mit einer Gradendfläche a (sie ist grade angesetzt, weil α senkrecht auf a, und grade aufgesetzt, weil der Winkel zwischen $\alpha\gamma = \alpha\beta$) ansehen.

4) *Zwei Säulen unter sich gleich und schiefwinklich, die dritte rechtwinklich.*

Es sei Säule $a\,b$ rechtwinklich, Säule $a\,c$ und $b\,c$ aber schiefwinklich und gleich; so bekommen wir eine recht winkliche Säule $a\,b$ mit einer Schiefendfläche c, welche auf die rechtwinkliche Säulenkante *grade aufgesetzt* ist, d. h. die nach a und nach b hin gleiche Kantenwinkel macht, aber *schief angesetzt*, d. h. die Säulenkante a/b steht nicht rechtwinklich, sondern schiefwinklich gegen Fläche c. Zu gleicher Zeit sehen wir, dafs die drei Kanten auf einander schief stehen, und zwei der schiefen Winkel unter sich gleich sein müssen.

5) *Zwei Säulen unter sich gleich und schiefwinklich, und die dritte ebenfalls schiefwinklich.*

Man darf sich die rechtwinkliche Säule (ab) unseres vierten Falles nur schiefwinklich denken, dann wird die dritte Fläche (c) die Schiefendfläche der geschobenen vierseitigen Säule (ab) sein. Die drei ebenen Winkel der Richtungen sind im Allgemeinen schief, aber zwei darunter noch gleich; doch kann auch der ungleiche ein rechter werden.

6) *Die drei Säulen sind ungleich, aber eine rechtwinklich.*

Möglicherweise kann einer der ebenen Winkel von den drei Richtungen (α, β, γ) gebildet, ebenfalls ein rechter werden. Denn denkt man sich die rechtwinkliche Säule aufrecht, so wird die dritte Fläche mit ihren Kanten die Richtung der Säule noch unter jedem Winkel schneiden können, also auch unter einem rechten.

7) *Die drei Säulen sind ungleich und schiefwinklich.*

Es ist diefs der allgemeinste Fall, das Parallelopiped der Mathematiker, welcher A. Kap. III. 2. der allgemeinen Betrachtung unterworfen ist.

Mit diesen 7 Fällen sind alle mathematisch denkbaren Möglichkeiten erschöpft, wenn anders wir die Eintheilung nur nach dem Principe der Gleichheit und Ungleichheit vornehmen.

Zusatz 1. Wir können das Princip auch noch in anderer Weise auf das Hexaid anwenden. Das Hexaid ist der Körper mit drei Richtungen. Lassen wir daher drei Richtungen $a \ldots a'$, $b \ldots b'$ und $c \ldots c'$ (Tab. IV. Fig. 4.) sich einander schneiden, indem wir c sich aus der Ebene erhebend denken wollen! Nennen wir den Winkel $aob = \gamma$, so ist $aob' = \gamma'$, wo $\gamma + \gamma' = 180^\circ$; $aoc = \beta$, so ist $a'oc = \beta'$, wo $\beta + \beta' = 180^\circ$; $boc = \alpha$, so ist $boc = \alpha'$, wo $\alpha + \alpha' = 180^\circ$. Die dreimal zwei Complementwinkel $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$ und $\gamma + \gamma'$ gehören den Flächen der drei Krystallräume irgend eines Hexaides an, das wir auf eine Hexaidfläche projicirt haben. Wir haben daher im Allgemeinen 6 Winkel in

Rücksicht auf Gleichheit und Ungleichheit zu betrachten, von denen aber immer drei (α, β und γ) die andern drei (α', β', γ') bestimmen.

1) Setzen wir alle gleich, so müssen sämmtliche Winkel Rechte sein. Wir bekommen daher obigen *Fall* 1.

2) Setzen wir viere gleich, also $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, γ und γ' aber ungleich, so müssen die vier gleichen nothwendig vier Rechte sein; überhaupt ist es nicht möglich, vier der Winkel gleich zu setzen, wenn sie nicht Rechte wären, und zwar dergestalt, dafs je zwei in einer Axenebene liegen. Diefs ist *Fall* 3.

Da wir alle 6 Winkel gleich gesetzt haben, so könnte es uns auch einfallen, 5 gleich zu setzen, doch das ist unmöglich.

3) Setzen wir 3 gleich, so müssen nothwendig auch die andern 3 gleich sein, d. h. $\alpha=\beta=\gamma=$ schief; $\alpha'=\beta'=\gamma'=$ schief; Rechte können sie nur werden, wenn sie alle unter sich gleich kommen. Um den Satz einzusehen, dürfen wir nur c so gegen den scharfen γ' rücken, dafs $cob'=coa=\gamma'$ wird. *Diefs ist Fall* 2.

Setzen wir zwei gleich, so sind mehrere Fälle möglich:

a) die zwei gleichen sind rechte, dann mufs $\alpha=\alpha'$ (oder was dasselbe wäre $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$), d. h. die beiden gleichen Winkel müssen in *einer* Axenebene liegen. Denn nähmen wir sie in zwei Axenebenen an, z. B. $\alpha=\beta=R$, so müfste ja $\alpha'=\beta'=R$ sein, wir hätten dann vier Rechte.

4) Ist also $\alpha=\alpha'=R$, so kann $\beta=\gamma=$ schief sein. Diese Annahme kann mit Fall 5 und Fall 6 unter besondern Bedingungen zusammenfallen.

5) Ist $\alpha=\alpha'=R$, die übrigen Winkel aber ungleich. Kann Fall 6 werden.

b) die zwei gleichen sind schiefe, also $\alpha=\beta=$ schief, dann dürfen sie nicht in *einer* Axenebene liegen.

6) Also $\alpha = \beta$, von γ verschieden aber alle schief. Wird im Allgemeinen Fall 5.

7) Alle Winkel ungleich, also schief. Ist auch im Allgemeinen Fall 7.

Zusatz 2. Da nach A. §. 50 und 51 die Kanten des Hexaides drei Axen des Oktaides respektive parallel gehen, so hängt mit der Eintheilung des Hexaides auch die Eintheilung der Axen genau zusammen. Daher mufs der Anfänger sich mit obigen Sätzen auf jede Weise vertraut machen, und sie zu klarer Anschauung bringen. Am besten wird er diefs erreichen, wenn wir einen Satz aus der rechnenden Krystallographie, die von den Richtungen ausgeht, heraufnehmen.

Sind mir drei Richtungen (Axen a, b, c) im Raume gegeben, und bewege ich dieselben in einen Punkt (o Tab. IV. Fig. 4), so bestimmen mir diese 3 Ebenen (Axenebenen ab, ac, bc). Axenebenen und Axen schneiden sich in dem einen Punkte o, und bilden hier eine Hexaidecke. In dieser Hexaidecke (körperlichen Ecke) sind die drei ebenen Winkel (α, β, γ), welche die Axen im Punkte o bilden, von den drei Kantenwinkeln (a, b, c) zu unterscheiden, welche von den Axenebenen in den Axen gebildet werden. Die Neigungswinkel (a, b, c) der Axenebenen und die Neigungswinkel (α, β, γ) der Axen liegen sich respektive gegenüber; die erstern entsprechen den Kantenwinkeln, die letztern den ebenen Winkeln des Hexaides. In der sphärischen Trigonometrie wird ferner bewiesen, dafs wenn irgend drei der sechs Winkel (a, b, c, α, β, γ) bekannt sind, so folgen die übrigen drei durch Rechnung. Theile ich daher die Axenelemente z. B. nach den drei Winkeln a, b, c ein, so folgen daraus die übrigen drei α, β, γ durch Rechnung, und umgekehrt. Beide Arten der Eintheilung fallen aber nur theilweise zusammen. Wir haben diefs oben gesehen. Denn theilten wir die Hexaide in §. 10. nach der Gleichheit und Ungleich-

heit der Säulenwinkel ein (d. h. nach den Neigungswinkeln a, b, c der Axenebenen), so bekamen wir 7 Fälle; allein diese Fälle fielen im Allgemeinen nicht mit denen in *Zusatz* 1. zusammen, wo wir die Eintheilung nach den ebenen Winkeln (d. h. nach den Neigungswinkeln α, β, γ der Axen) vornahmen. Der Grund davon ist ein mathematischer, und läſst sich aus den Formeln der körperlichen Ecke leicht folgern. Doch wollen wir versuchen, denselben theilweise auf anschaulichem Wege vorzuführen.

Betrachte ich entweder die drei Neigungswinkel (α, β, γ) der Axenrichtungen, oder die drei (a, b, c) der Axenebenen, so sind, wenn ich die Winkel nach rechten und schiefen eintheile, je 4 Fälle möglich.

1) Alle Winkel rechte; *Orthometrisches System* (μέτρον das Maſs, ὀρθός aufrecht).

2) Zwei Winkel rechte, der dritte schief; *Monoklinometrisches System* (μόνος Einer, κλίνειν neigen).

3) Ein Winkel recht, zwei schief; *Diklinometrisches System* (δίς doppelt).

4) Alle Winkel schiefe; *Triklinometrisches System* (τρίς dreifach).

Um zu sehen, daſs diese vier Systeme auf die Winkel α, β, γ bezogen, nicht immer mit den vier Systemen auf die Winkel a, b, c bezogen, zusammen fallen können, möge das Papier (Tab. IV. Fig. 4.) die Axenebene ab vorstellen, in welcher der Winkel γ von den Axenrichtungen a und b eingeschlossen wird. Legen wir ein Kartenblatt durch die aufrechte Axenrichtung c und durch a, so stellt dieses die Axenebene ac dar, in welcher der Winkel β von den Axenrichtungen a und c eingeschlossen wird. Folglich bleibt für die dritte Axenebene, welche wir uns mit einem durch bc gelegten Kartenblatte versinnlichen wollen, der von den Axenrichtungen b und c eingeschlossene Winkel α über.

1*ster Fall. Orthometrisches System:* $a=b=c=90^0$; *folglich* $\alpha=\beta=\gamma=90^0$; *und umgekehrt.*

Blatt *ac* steht senkrecht auf Papier *ab*; Blatt *bc* senkrecht auf Papier *ab*; folglich die Durchschnittslinie (*c*) beider Blätter senkrecht auf die Axenrichtungen *a* und *b*. Das Papier *ab* ist daher die Ebene des Neigungswinkels (*c*) der Kartenblätter. Da nun auch Blatt *ac* auf Blatt *bc* der Annahme zu Folge senkrecht steht, also der Neigungswinkel der Kartenblätter ein Rechter ist, so müssen auch die Axenrichtungen *a* und *b* auf einander senkrecht stehen, d. h. die Orthometrischen Systeme beider Arten fallen zusammen.

2*ter Fall. Monoklinometrisches System;* $a=b=90^0$, *c schief; folglich* $\alpha=\beta=90^0, \gamma=c$; *und umgekehrt.*

Blatt *ac* steht senkrecht auf Papier *ab*; Blatt *bc* senkrecht auf Papier *ab*; daher die Neigungswinkel *a* und *b* der Axenebenen Rechte, und Axenrichtung c senkrecht auf die Axenrichtungen *a* und *b*, d. h. α und β sind rechte Winkel. Das Papier *ab* mufs daher auch hier (wie in *Fall* 1) die Neigungsebene der Kartenblätter *ac* und *bc* sein, γ ist also stets $= c$, mag man die Kartenblätter gegen einander oder von einander bewegen; d. h. die Monoklinometrischen Systeme beider Arten fallen zusammen.

Ist umgekehrt $\alpha=\beta=90^0$, so steht die Axenrichtung c senkrecht auf Papier *ab*, folglich mufs auch jede mögliche durch c gelegte Ebene, wie z. B. jedes der beiden Kartenblätter, auf das Papier senkrecht stehen etc.

3*ter Fall. Diklinometrisches System:* $a=90^0$, *b und c schief; dann müssen* α, β, γ *schief sein; und umgekehrt.*

Es stehe Blatt *ac* senkrecht auf Papier *ab*, so ist der Winkel *a* der Axenebenen *ac* und *ab* ein rechter, und die Axenrichtung *a* dadurch bestimmt. Man kann nun im Blatt *ac* die Axenrichtung c gegen Axenrichtung *a* unter

einem schiefen Winkel β ziehen, wonach es uns immer noch frei steht, die 3te Axenrichtung b so zu bewegen, daſs sie weder mit a noch mit c einen rechten Winkel macht. Wir bekommen also 3 schiefe Winkel α, β, γ, während von den 3 Winkeln a, b, c der Winkel a ein rechter ist; rücksichtlich der ersten Winkel ist das System triklinometrisch, rücksichtlich der letztern aber diklinometrisch. Denn durch die Bewegung der Axe b darf von den Neigungswinkeln der Axenebenen auſser a keiner mehr ein rechter geworden sein; wäre dieſs der Fall, so hätten wir ja ein monoklinometrisches System, folglich auch nach *Fall* 1 unter den Neigungswinkeln α, β, γ der Axenrichtungen zwei rechte, was der Voraussetzung widerspricht.

Wollten wir etwa die Axenrichtung b gegen die Axenrichtung a so bewegen, daſs der Winkel γ ein rechter würde, so würde b auf die ganze Axenebene $a\,c$ senkrecht stehen; es könnten alsdann nicht beide Winkel α und β zugleich noch schief sein, sondern α würde nothwendig noch ein rechter. Wir erhielten also ebenfalls ein monoklinometrisches System, was der Voraussetzung widerspricht. Was für die Axenrichtung b gilt, gilt auch bezüglich für c. Daher kann mit dem Winkel $a = 90^0$ nicht *einer* der Winkel α, β, γ zugleich ein rechter sein.

Ist umgekehrt Winkel a, durch Blatt ac und Papier ab gebildet, schief, so kann ich Axenrichtung b auf Axenrichtung a (oder c auf a) senkrecht ziehen, wodurch dann $\gamma = 90^0$ wird, während Axenrichtung c gegen beide Axenrichtungen a und b schief steht. Da Axenrichtung b nicht auf das Blatt ac senkrecht steht, sondern nur gegen die einzige Linie a deſselben, so kann ich durch b das Blatt $b\,c$ so legen, daſs es sowohl mit Blatt ac, als auch mit dem Papiere ab schiefe Winkel macht. Das System ist daher rücksichtlich der Winkel a, b, c triklinometrisch, rücksichtlich der Winkel α, β, γ aber diklinometrisch. Lieſsen wir das Blatt bc etwa senkrecht auf das Papier

ab stehen, so müfste dafselbe, da es in *b* liegt, welches senkrecht auf *a* steht, auch senkrecht auf *a* stehen; wir bekämen dann also ein monoklinometrisches System; eben so wenn das Blatt gegen Blatt *ac* senkrecht stände.

Aus allem diesem folgt, dafs ein diklinometrisches System der einen Art nothwendig nach der andern Art triklinometrisch sein müsse, und umgekehrt.

4*ter Fall. Triklinometrisches System:* alle Winkel *a*, *b*, *c*, *α*, *β*, *γ* *sind schief.*

Diese können neben einander bestehen, weil durch das eine System der schiefen Winkel das andere im Allgemeinen rücksichtlich der Rechtwinklichkeit nicht bestimmt ist. Nur, wie wir *Fall* 3 gesehen haben, kann ein triklinometrisches System der einen Art im besondern Falle ein diklinometrisches der andern Art sein.

Da man nun keinen Grund hat, den einen drei Winkeln vor den andern dreien den Vorzug zu geben, so enthält das diklonometrische System einen Widerspruch in sich, kann folglich auch nicht in die Reihe der Systeme aufgenommen werden; ein Schlufs, zu dem uns noch die fernern Betrachtungen berechtigen müfsen.

§. 11.

Nach der physikalischen Beschaffenheit der Krystallräume zerfallen die Hexaide in: ungleich-, zwei und ein- und gleichräumige.

Im Allgemeinen müfste jeder der 7 Fälle (§. 10.) hiernach in drei Unterabtheilungen zerfallen, allein viele derselben sind krystallographisch ausgeschlofsen.

1*ster Fall. Alle drei Säulen unter sich gleich und rechtwinklich.*

1) Die Krystallräume unter sich gleich: *Würfel.*

Der Würfel hat daher drei gleiche rechtwinkliche Säulen und drei gleiche Krystallräume, man kann ihn auch das Hexaid des regulären Systems nennen (Hexaeder vor-

zugsweise). Die gleiche Streifung Tab. IV. Fig. 14. zeigt die gleiche Beschaffenheit der Flächen an.

2) Zwei Krystallräume gleich vom dritten verschieden: Hexaid des viergliedrigen Systemes (Fig. 15. Tab IV.).

Die eine Säule (a, b) ist gleichflächig (gleichräumig) und rechtwinklich, wie sie häufig im viergliedrigen Systeme erscheint; die dritte (c) ist aber davon verschieden. Man nennt sie auch *quadratische Säule mit Gradendfläche*.

3) Die drei Krystallräume verschieden: das Hexaid des zwei und zweigliedrigen Systemes (Fig. 16. Tab. IV.).

Es ist die *breite rechtwinkliche Säule mit Gradendfläche*.

2ter Fall. Alle drei Säulen unter sich gleich und schiefwinklich.

Hier kommen ungleich- und zwei und einräumige Hexaide nicht vor, nur

4) die gleichräumigen, *das Rhomboeder*. Das Rhomboeder ist also ein Körper, worin 3 Kanten $= \alpha$, und 3 Kanten $= \alpha'$, so dafs $\alpha + \alpha' = 180^0$. Immer ist eine Ecke vorhanden, in welcher drei gleiche Kanten liegen, Endecke genannt, die zwei und einkantigen sind Seitenecken (Fig. 1. Tab. IV.).

3ter Fall. Zwei Säulen unter sich gleich und rechtwinklich, die dritte schiefwinklich.

Auch hier sind gleich- und 2+1räumige nicht vorhanden, nur

5) die ungleichräumigen, *das Hexaid des zwei- und eingliedrigen Systemes*. Es ist eine rechtwinklich ungleichräumige Säule (Fig. 16. a, b), auf deren eine (vordere) Fläche (a) eine Schiefendfläche (c) unter schiefen Winkeln aufgesetzt ist. Die Säulenkante (γ) und die Seitenkante der Schiefendfläche (α) stehen

noch auf die Kante des schiefen Winkels (β) senkrecht, bilden aber unter sich einen schiefen Winkel (b).

Zusatz. Es wird für den Jugendlehrer oft von Nutzen sein, auch die andern möglichen Unterabtheilungen durch zu gehen. So kann z. B. der 3te Fall recht gut 2 und 1räumig auftreten. Wir stellen die Kante der schiefwinklichen Säule (γ. Fig. 15. Tab. IV.) horizontal und oben, dann wird die Seitenfläche (c) die ungleiche, das Paar der schiefwinklichen Säule ist gleichflächig (2 und 2 gl. System).

4*ter Fall. Zwei Säulen unter sich gleich und schiefwinklich, die dritte rechtwinklich.*

Körper dieser Art kommen zwar vor, allein sie müfsen dann aus dem Flächenzusammenhange gerifsen werden (§. 9. Zusatz 2.). So kann man z. B. einen 2 und 1räumigen aus dem viergliedrigen oder regulären Systeme nehmen, nemlich eine rechtwinklich gleichräumige Säule mit einer Schiefendfläche, gerade auf die Kante (unter gleichen Winkel) aufgesetzt; allein zu letzterer wird man im viergliedrigen Systeme noch drei andere finden von gleicher Beschaffenheit, so dafs dieselbe nur künstlich herausgenommen ist.

5*ter Fall. Zwei Säulen unter sich gleich und schiefwinklich, und die dritte ebenfalls schiefwinklich.*

Ungleich- und gleichräumige Hexaide sind hier ebenfalls nicht vorhanden, sondern nur

6) das zwei und einräumige (2 + 1flächige), *das Hendioeder,* wie der Name sagt; wir haben eine schiefwinklich gleichräumige Säule (a, b Fig. 15.) mit einer Schiefendfläche (c), die zu beiden Seiten gegen die Säulenfläche gleich geneigt ist ($\beta = \alpha$). Daher ist die vordere Ecke 2 und 1flächig ($a = b$, c) und 2 und 1winklich ($\alpha = \beta$, γ). Sie findet sich in den 2 und 1gliedrigen Systemen.

6ter Fall. Die drei Säulen sind ungleich, aber eine rechtwinklich.

Im Allgemeinen wird dieses Hexaid

7) ungleichräumig, *das Hexaid des diklinometrischen Systems.*

7ter Fall. Die drei Säulen sind ungleich und schiefwinklich.

8) ungleichflächig, *das Hexaid des triklinometrischen Systemes* (1 und 1gliedrig, der allgemeinste Körper.

Zusatz. Es war uns hier nur um die logische Möglichkeit zu thun, der allgemeine Zusammenhang dieser Körper kann erst aus dem Oktaide hervorgehen. Wenn daher der Anfänger nicht alles versteht, so mag er es nur vorläufig überschlagen.

§. 12.

Von den Vierzonenkörpern wollen wir nur, da sie seltener als selbstständige Formen aufgeführt werden, einige erwähnen.

1) *Die reguläre sechsseitige Säule mit Gradendfläche.*

Die drei Krystallräume der Säule sind physikalisch gleich, und machen unter sich 120°, die Gradendfläche, ein reguläres Sechseck, steht senkrecht auf die Säulenzone. Sie verhält sich zum 6gliedrigen System, wie das 2 und 1flächige rechtwinkliche Hexaid zum viergliedrigen Systeme.

2) *Die zwei und einflächige sechsseitige Säule* (§. 9.) *mit Gradendfläche und mit Schiefendfläche.* Erstere steht rechtwinklich auf die Zonenaxe der Säule; letztere ist auf die Kante der geschobenen (gleichräumigen) vierseitigen Säule gerade aufgesetzt, aber schief angesetzt.

Zusatz. Sämmtliche Vierzonenkörper ergeben sich unmittelbar aus dem Hexaide, wenn man durch den vierten Krystallraum irgend eine Hexaidkante abstumpfen läſst.

§. 13.

Die Glieder des Oktaides sind diejenigen Theile, durch deren Eintheilung ein naturgemäfses System zu Stande kommt.

Da das Oktaid (A. §. 41.) derjenige Körper war, welcher zuerst in ein Gleichgewicht gebracht und mit Axen versehen werden konnte, so mufs mit ihm die Systematik beginnen. Obige vorläufige Shematisirungen sind nur der Gleichmäfsigkeit wegen mit der Zonenlehre voran geschickt, sie finden erst in dem Folgenden ihr volles Verständnifs. Die Glieder, welche beim Oktaid möglicher Weise nach Gleichheit und Ungleichheit eingetheilt werden können, sind:

1) die vier Krystallräume;
2) die 6 Richtungen (Zonen, oder kurz hin Kanten, welche sich in $2 . 6 = 12$ zerspalten);
3) die sogenannten basischen Schnitte, deren Umrifse auf den 3 Flächen des zugehörigen Hexaides stehen.

Sämmtliche drei Eigenschaften des Oktaides hängen auf das Engste mit den Eigenschaften der Axen zusammen, und sind die Glieder gekannt, so folgen daraus die Axen und umgekehrt.

§. 14.

Bringen wir die 12 *Kanten des Oktaides in drei Gruppen zu vier, so bilden diese Gruppen die Seiten der drei basischen Schnitte.*

Gehen wir (Tab. IV. Fig. 4.) von Axe a über c und a' nach c', so liegen in diesem Wege die Kanten

$$\overline{|a : c|}, \quad \overline{|c : a'|}, \quad \overline{|a' : c'|}, \quad \overline{|c' : a|},$$

und diese bilden stets ein Parallelogramm. Gehen wir von Axe b über c und b' nach c', so bekommen wir 4 neue Kanten

$$\overline{|b : c|}, \quad \overline{|c : b'|}, \quad \overline{|b' : c'|}, \quad \overline{|c' : b|},$$

die ein zweites Parallelogramm einschliefsen. Gehen wir endlich in der Ebene des Papieres von a über b und a' nach b', so bekommen wir abermals 4 Kanten

$$\overline{|a : b|}, \quad \overline{|b : a'|}, \quad \overline{|a' : b'|}, \quad \overline{|b' : a|},$$

die das dritte Parallelogramm bilden. Diese drei Gruppen von Kanten, durchaus symmetrisch gegen die Axe gelagert, heifsen die basischen Schnitte. Alle basischen Schnitte müfsen nothwendig Parallelogramme sein. Eine andere symmetrische Gruppirung nach 4 + 4 + 4 ist nicht möglich.

§. 15.

Nach der Gleichheit und Ungleichheit der Kanten und Winkel zerfallen die basischen Schnitte (Parallelogramme) in vier Abtheilungen:

1) *das Quadrat mit gleichen und rechtwinklichen Axen;*
2) *das Rechteck mit gleichen und schiefwinklichen Axen;*
3) *der Rhombus mit ungleichen und rechtwinklichen Axen;*
4) *das Rhomboid mit ungleichen und schiefwinklichen Axen.*

Damit sind die Abtheilungen erschöpft, und wir können zugleich aus der Form des basischen Schnittes auf die Gröfse und Neigung der Axen schliefsen. Da nun jedes Oktaid drei basische Schnitte hat, so müfste es im Allgemeinen so viele Oktaide geben, *als aus diesen 4 Gröfsen je drei mit Wiederholung kombinirt werden können.*

§. 16.

Vierzehn Oktaide sind nach solcher Eintheilung der basischen Schnitte möglich.

Haben wir vier Gröfsen 1, 2, 3, 4, welche die viererlei Parallelogramme des §. 15. bezeichnen, so sind diese auf folgende Weise mit Wiederholungen combinirt:

111, 112, (113), (114)
122, (123), (124)
133, 134
144

222, (223), (224)
233, 234
244

333, 334
344

444

Summa 20 Oktaide. Diese Verbindungen können jedoch nicht alle nebeneinander bestehen, wenn wir den Sinn der Zahlen beherzigen, und uns zugleich die basischen Schnitte in ihrer Lage am Oktaide denken. So bedeutet z. B. das erste Zeichen 111 ein Oktaid mit drei Quadratschnitten. Der eine Schnitt durch $a\ b\ a'\ b'$ gehend sagt uns, dafs a gleich und rechtwinklich mit b sein müfse. Jeder der beiden andern Schnitte ($a\ c\ a'\ c'$ und $b\ c\ b'\ c'$) hat mit dem ersten eine Diagonale (Axe) gemein, daraus folgt, dafs auch a gleich und rechtwinklich mit c sein müfse. Der Schlufs aus diesen beiden Gleichungen

$$\begin{array}{r} a = b \\ a = c \\ \hline \text{ist } b = c; \end{array}$$

es müfsen also, wenn zwei Basalschnitte gleiche Diagonalen (Axen) verlangen, auch die Diagonalen des dritten Basalschnittes unter sich gleich sein. Da nun in unserm Falle der dritte Schnitt noch ein Quadrat sein soll, so müfsen b und c zu gleicher Zeit noch auf einander rechtwinklich stehen, das Oktaid 111 hat also nothwendig gleiche und rechtwinkliche Axen.

Betrachten wir das Zeichen 112, so setzen die 11 wieder zwei Quadrate mit Diagonalen wie vorher voraus, folglich müfsen auch im dritten Basalschnitte die Diagonalen unter sich gleich sein, was auch im Oblongum 2 der Fall

ist. In diesem Oktaide sind daher, wie im vorigen, alle drei Axen unter einander gleich lang, allein es bildet jetzt ein Diagonalpaar (2) schiefe Winkel.

Aus diesem geht nun an sich schon hervor, dafs ein Zeichen 113 nicht denkbar ist, denn die 11 setzen voraus, dafs alle Axen unter einander gleich sein müssen, während die 3 verlangt, dafs die Diagonalen (Axen) eines Basalschnittes ungleich sein sollen, was sich widerspricht. Wir ziehen daraus die Regel, dafs *wenn zwei basische Schnitte Gleichheit der Axen voraussetzen, mit diesem nie ein basischer Schnitt zugleich auftreten kann, der die Ungleichheit verlangt.* Daher ist auch 114 unmöglich, denn die beiden 11 setzen die Gleichheit je zweier Axen voraus, 4 aber die Ungleichheit; ebenso 123, 124, 223, 224. Die übrigen Vierzehn: 111, 112, 122, 133, 134, 144, 222, 233, 234, 244, 333, 334, 344, 444 können aber wohl Statt haben, denn drei Ungleichheiten und zwei Ungleichheiten mit einer Gleichheit können sehr wohl neben einander bestehen. Diese vierzehn Oktaide gruppiren sich nach ihren Diagonal winkeln abermals in drei Gruppen.

1) Oktaide mit rechtwinklichen Axen. Sie dürfen nur die Zahlen 1 und 2 haben, weil nur in diesen basischen Schnitten rechtwinkliche Axen Statt finden. Also gehören hieher: 111, 133, 333.

2) Oktaide mit nur schiefwinklichen Axen. Sie dürfen keine andere Zahl als 2 und 4 enthalten, weil nur diesen Parallelogrammen schiefe Axen zugehören. Folglich stehen hier: 222, 244, 444.

3) Oktaide mit schiefen und rechtwinklichen Axen. In ihren Zeichen finden sich sämmtliche Zahlen, nämlich: 112, 122, 134, 144, 233, 234, 334, 344; davon haben 112, 233, 334 zwei Mal, die übrigen nur ein Mal je zwei rechtwinkliche Axen.

Zusatz. Wir können jedes dieser vierzehn Zeichen

einer abermaligen Eintheilung unterwerfen, indem wir die einzelnen Basalschnitte nach der Gleichheit und Ungleichheit der Diagonallängen und Diagonalwinkel (Winkel, unter welchen sich die Diagonalen kreuzen) betrachten. Haben wir nemlich das Oktaid 444, mit drei Rhomboiden in den Basalschnitten, so können wir dieselben so denken, dafs in allen dreien die Diagonalwinkel gleich sind, alsdann werden sich alle Axen des Oktaides unter gleichen schiefen Winkeln schneiden. Wir wollen dieses Oktaid mit 444 bezeichnen, worin die ohne Abzeichen stehenden Zahlen auf die Gleichheit der Diagonalwinkel hindeuten. Wir können uns ferner die Diagonalwinkel in zwei Rhomboiden gleich denken, aber von den Winkeln im dritten verschieden, ein solches Oktaid mag mit 444· bezeichnet sein, worin die beiden ersten (44) in Rücksicht auf ihre Diagonalwinkel noch gleich sind, nur die dritte (4·) sich durch ihren Punkt von den übrigen unterscheidet. Daraus folgt dann von selbst das Zeichen 44·4··, ein Oktaid andeutend, worin die Diagonalwinkel in allen dreien von einander verschieden sind.

Auch auf die *Länge* der Diagonalen könnten wir denselben Eintheilungsgrund anwenden wollen. Allein hier zeigt sich gleich, dafs der Gedanke sich nicht durchführen läfst. Denn wollten wir z. B. annehmen, dafs die zwei Diagonalen $a a'$ und $b b'$ des Rhomboides $a b a' b'$ respektive den beiden andern Diagonalen $a a'$ und $c c'$ des Rhomboides $ac ac'$ gleich wären, so müfste, weil $a a'$ beiden Rhomboiden gemein ist, Diagonale $b b' = c c'$ werden, d. h. das dritte durch $b c b' c'$ gehende Rhomboid kann kein Rhomboid mehr sein, sondern mufs wegen der Gleichheit seiner Diagonalen ein Oblongum werden; das Zeichen 444 wird zu 244, was sich widerspricht.

Um die Eintheilung nach den Diagonalwinkeln weiter zu verfolgen, wollen wir die vierzehn Zeichen und deren Bedeutung kurz durchgehen.

Das Zeichen 111 bedeutet ein Oktaid mit drei kongruenten quadratischen Schnitten. Denn je zwei Basalschnitte haben eine Diagonale gemein, und zwei Quadrate mit gemeinsamer Diagonale sind bekanntlich kongruent. Daraus folgt, daſs das Oktaid 6 gleich lange Kanten hat, unter der Voraussetzung, daſs dasselbe im Gleichgewicht gedacht werde.

Das Zeichen 112 bedeutet ein Oktaid mit 2 kongruenten Quadraten im Basalschnitte, und mit einem Oblongum. Die Axen des Oktaides sind also sämmtlich gleich lang, die Axenwinkel des Oblongums schief, und dürfen nie den Axenwinkeln des Quadrats gleich werden. Das Zeichen ist also eindeutig, und das Oktaid 4+1+1 kantig; die 4 Kanten den kongruenten Quadraten, die 1+1 dem ungleichseitigen Oblongum angehörig.

Das Zeichen 122 bezeichnet ein Oktaid mit einem Quadrate, die beiden andern Schnitte sind Oblongen mit schiefen Diagonalwinkeln; folglich können wir uns in beiden dieselben Diagonalwinkel denken oder nicht, wodurch das Zeichen zweideutig wird 122 und 122·. In jedem Falle sind die Oktaide aber gleichaxig; 122 aber 2+2+2 kantig, 122· hingegen 2+1+... kantig. Wollen wir die Zeichen zur Anschauung bringen, so müssen wir uns die gleichen Diagonalen des Quadrates aa' und bb' (Taf. IV. Fig. 4.) auf ein Blatt zeichnen, und eine Nadel $co=ao=bo$ in den Mittelpunkt o stecken. Steht die Nadel gegen a und b senkrecht, so haben wir das Oktaid 111. Bewegen wir die Nadel in der Axenebene ac (oder bc), so bleiben die Winkel cob und aob noch rechte, hingegen aoc wird schief; wir erhalten also das Zeichen 112. Bewegen wir hingegen die Nadel in der Diagonale der Oktaidfläche 111, d. h. denken wir uns die Nadel wieder senkrecht auf a und b, ziehen von c nach der Mitte der Oktaidkante $\overline{\underline{|a:b|}}$ eine Linie, und bewegen die Nadel in einer Ebene, welche durch

die Nadel und diese Linie geht (Dodekaidfläche), so wird in jeder Lage der Winkel $coa=cob$ sein, die beiden oblongen Basalschnitte $cac'a'$ und $cbc'b'$ werden folglich gleiche Diagonalwinkel zeigen, wodurch das Zeichen 122 veranschaulicht ist. Bewegen wir endlich die Nadel aus der Dodekaidfläche hinaus, so ist das Zeichen 122· veranschaulicht. Zu gleicher Zeit sehen wir ein, dafs in 111 der Punkt c von a und b am entferntesten liegt, in jeder andern Lage einem Axenpunkte a oder beiden a und b näher rückt. Daher kann in den Zeichen 112, 122 und 122· keine der übrigen Kanten der Kante des Quadratschnittes gleich werden. Die Gleichheit und Ungleichheit der Kanten ist also allein von den Basalschnitten abhängig; zwei Basalschnitte verschiedener Beschaffenheit (1 oder 2) können keine gleiche Kante mit einander gemein haben.

Das Zeichen 133 ist eindeutig, weil die Winkel unveränderliche Rechte sind, den Zahlen gemäfs. Die 1 verlangt im Quadrat $aba'b'$, die 3 einen Rhombus, daher mufs die Nadel c verschieden lang mit a und b sein. Ist aber Quadrat (1) und Rhombus (3) bestimmt, so mufs auch der 2te Rhombus (3) mit dem ersten kongruent sein, denn zwei Rhomben, die gleiche Diagonalen haben (Diagonale $cc'=cc'$ und $aa'=bb'$) sind kongruent. Das Oktaid ist 4+2 kantig.

Das Zeichen 134 enthält ein Quadrat (1) und einen Rhombus (3), folglich kann der Diagonalwinkel des Rhomboid's (4) mit den rechten Winkeln der übrigen Schnitte nicht verglichen werden. Das Zeichen ist also eindeutig. Bewegen wir die Nadel in der Kante des Oktaides (133), so ist diefs Oktaid veranschaulicht. Im Allgemeinen ist das Oktaid 2+2+1+1 kantig. Allein, da im Oktaide 133 die Axe c länger oder kürzer als a und b ist, so sind die Kanten $\overline{\underline{|c:a|}}=\overline{\underline{|c:b|}}$ länger oder kürzer, als die Kante $\overline{\underline{|a:b|}}$. Wäre z. B. c länger als b, so wäre Kante

$\boxed{c:b}$ auch länger als Kante $\boxed{a:b}$; würden wir nun c gegen b bewegen, so könnte in 134 Kante $\boxed{c:b}$ der Kante $\boxed{a:b}$ gleich werden. Wäre aber Kante $\boxed{c:b}$ der Kante $\boxed{a:b}$ gleich, so wäre das Oktaid 3+2+1 kantig. Der Kante $\boxed{a:c}$ kann die $\boxed{b:c}$ nie gleich werden. Doch ist ein solch kantiges Oktaid nur ein specieller Ausnahmsfall.

Das Zeichen 144 ist zweideutig; die beiden Rhomboide 44 können nemlich gleiche oder ungleiche Diagonalwinkel erhalten, also 144 und 144'. Sind in beiden Rhomboiden dieselben Diagonalwinkel (144), so sind sie auch zugleich kongruent, da ihnen die dritte Diagonale $c\,c'$ gemein ist, und Rhomboide mit gleichen Diagonalen ($c\,c' = c\,c'$, und $a\,a' = b\,b'$) und gleichen Diagonalwinkeln kongruent sein müfsen. Im Allgemeinen ist ein solches Oktaid 2+2+2 kantig, 2 im quadratischen Schnitte, die übrigen 2+2 vertheilen sich auf die kongruenten Rhomboide. Bewegt sich die Nadel in der Dodekaidfläche des Oktaides 133, so ist das Oktaid veranschaulicht. Daraus geht hervor, dafs im besondern Falle Kante $\boxed{a:c} = \boxed{b:c} = \boxed{a:b}$ werden kann, also das Oktaid 4+2 kantig. Bewegen wir die Nadel aus der Dodekaidfläche heraus, so erhalten wir das Oktaid 144', was im Allgemeinen 2+1+... kantig ist, aber im besondern Falle (wenn z. B. $\boxed{a:c} = \boxed{a:b}$ wird) auch 3+1+... kantig wird.

Zeichen 222 bedeutet in allen Fällen ein gleichaxiges Oktaid. Denkt man die Diagonalwinkel aller Oblonge gleich, also Zeichen 222, so ist das Oktaid 3+3 kantig, weil Oblongen mit gleichen Diagonalen und Diagonalwinkeln kongruent sind. Drei gleiche Kanten bilden immer die Seiten *einer* Oktaidfläche (§. 31.). Denken wir uns das Oktaid auf einen Basalschnitt ($a\,b\,a'\,b'$) projicirt, und liegen die drei gleichen Kanten im Oktanten $a\,b\,c$, so erhal-

ten wir das Zeichen 222·, wenn wir Axe c (eine Nadel!) in der Dodekaidfläche (welche in der von c nach der Kantenmitte von $\overline{|a:b|}$ gezogenen Diagonale der Oktaidfläche $\overline{|a:b:c|}$ liegt) bewegen. Denn in diesem Falle macht c mit a und b gleiche Axenwinkel, das Oktaid ist also $2+2+1+1$ kantig. Bewegen wir die Nadel aus der Dodekaidfläche heraus, so ist kein Diagonalwinkel dem andern gleich, wir haben also das Zeichen 22·2··, welches ein $1+1+\ldots$ kantiges Oktaid bezeichnet.

Zeichen 233 ist eindeutig, denn die Rhomben 33 verlangen zwei Mal rechtwinkliche Axen, also mufs z. B c senkrecht auf a und b stehen. Die Rhomben $aca'c'$ und $bcb'c'$ sind daher kongruent, das Oktaid $4+1+1$ kantig.

Im Zeichen 234 haben die Basalschnitte 2 und 4 schiefe Diagonalwinkel. Legen wir das Oblong 2 durch die Axen $a=b$, so ist c von den Axen a und b verschieden, weil der Rhombus 3 durch c und durch a oder b gehen mufs. Bewegen wir daher Axe c in der Oktaidkante des Oktaides 233, so erhalten wir das $2+1+\ldots$ kantige Oktaid 234. Man kann die Axe c so bewegen, dafs Axenwinkel $cob=aob$ wird, alsdann machen die Diagonalwinkel im Oblongum 2 dieselben Winkel, wie im Rhomboid 4. Diesen Fall könnte man mit $2^{4}34$ oder 234^{2} bezeichnen, wo der Exponent andeuten würde, dafs die schiefwinklichen Diagonalen in beiden Parallelogrammen sich unter denselben Winkeln schnitten. Das Oktaid wäre ebenfalls $2+1+\ldots$ kantig.

Zeichen 244 kann man zweideutig nehmen. Bewegen wir im Oktaid 233 die Axe c in der Dodekaidfläche, so sind die beiden Rhomboide $aca'c'$ und $bcb'c'$ kongruent, folglich auch mit gleichen Diagonalwinkeln versehen. Diefs gibt das $2+2+1+1$ kantige Oktaid 244. Wir können dabei die c so weit bewegen, dafs die Diagonalwinkel der Rhomboide mit den Diagonalwinkeln des Oblongums gleich

werden. Diesen Fall würden wir wieder 2'44 schreiben können. Auf die Kanten des Oktaides hätte diefs im Allgemeinen keinen Einflufs. Bewegen wir die *c* aus der Dodekaidfläche heraus, so werden die Diagonalwinkel in den Rhomboiden verschieden, daher das 1+1+... kantige Oktaid 244·.

Das Oktaid 333, mit lauter Rhomben und folglich ungleichen rechtwinklichen Axen, ist nur ein eindeutiges 2+2+2 kantiges Oktaid.

Eben so eindeutig ist 334; wir dürfen hier die Axe *c* nur in einer der Oktaidkanten fortbewegen, wodurch das Rhomboid 4 mit schiefwinklichen Diagonalen entsteht. Das Oktaid selbst ist 2+2+1+1 kantig.

Zweideutig ist 344. Denn bewegen wir *c* in der Dodekaidfläche (des Oktaides 133), so wird sie stets mit *a* und *b* gleiche Axenwinkel machen, folglich sind die Rhomboide *cac'a'* und *cbc'b'* in Beziehung auf ihre Diagonalwinkel gleich, kongruent können sie aber nicht werden, weil sie nur eine Diagonale *cc'* gemein haben, die andern beiden *aa'* und *bb'* aber ungleich sind. Dennoch schreiben wir dieses Oktaid 344, es ist 2+1+1... kantig. Bewegen wir *c* aus der Dodekaidfläche heraus, so sind die Diagonalwinkel der Rhomboide verschieden, daher das Zeichen 344·.

Endlich bleibt uns noch das Zeichen 444 über, das die 1+1+... kantigen Oktaide enthält. Wir können uns hier alle Rhomboide mit gleichen Diagonalwinkeln (444) denken, wobei sie aber nicht kongruent werden, weil immer nur je zweien eine gleiche Diagonale gemein ist; oder 2 gleich vom dritten verschieden 444·; oder alle drei ungleich 44·4··.

Aus der ganzen Betrachtungsweise geht hervor, dafs wir nur auf die Diagonalwinkel und nicht auch zugleich auf die Diagonallänge bei der Eintheilung nach Gleichheit und Ungleichheit Rücksicht zu nehmen haben. Eben so

unberücksichtigt bleibt die Kongruenz, ohne dafs wir in die Gefahr kämen, irgend einen Fall zu übersehen.

§. 17.

Wenden wir zugleich das Princip der Gleichheit und Ungleichheit noch auf die Diagonalwinkel (Axenwinkel) der Parallelogramme an, so sind 14+10=24 *Oktaide möglich.*

Dieser Satz folgt jetzt unmittelbar aus §. 16. *Zusatz*: Dort sahen wir, dafs die Rhomboide mit quadratischen und rhombischen Schnitten: 111, 133, 333 nur eindeutig seien. Selbst wenn das Oktaid nur *ein* Rhomboid oder *ein* Oblongum hat, die übrigen beiden aber Rhomben oder Quadrate mit rechtwinklichen Diagonalen sind, sind die Zeichen noch eindeutig, weil der eine basische Schnitt mit schiefwinklichen Diagonalen den rechtwinklichen nicht gleich werden darf, wenn wir nicht in die vorigen drei (Oktaide mit lauter rechtwinklichen Axen) wieder gerathen wollen. Dahin gehören 112, 134, 233, 334. Die übrigen sieben: 122, 144, 344, 222, 244, 234, 444 sind mehrdeutig, denn in den zugehörigen Oktaiden sind wenigstens zwei basische Schnitte mit schiefwinklichen Diagonalen vorhanden. Wenn wir nicht blos die Oblongen mit Oblongen und die Rhomboide mit Rhomboiden, sondern auch die Oblonge mit Rhomboiden in Beziehung auf ihre Diagonalwinkel vergleichen, so erhalten wir folgende Fälle:

122	144	344	222	444	$2^{4}44$	$2^{4}34$
122·	144·	34·4	222·	444·	244	234;
			22·2··	44·4··	244·	

also 10 Oktaide mehr, daher 14+10=24.

Zusatz 1. Da jedes Parallelogramm durch die Länge und Winkel seiner Diagonalen bestimmt ist, Diagonallängen und Diagonalwinkel aber mit den Axenlängen und Axenwinkeln des Oktaides übereinstimmen: so müfsen wir auf dieselben Abtheilungen kommen, wenn wir von den Axenelementen ausgehen. Zu dem Ende denken wir uns

das Oktaid nach der Axe c aufrecht gestellt, die Axen a und b aber in der Ebene des Papieres (Tab. IV. Fig. 4.). Würden wir in dieser Stellung das Oktaid auf die Hexaidfläche (Axenebene ab) projiciren, so würden die Axenlinien a und b Sektionslinien zweier zugehörigen Hexaidflächen sein. Zögen wir ferner durch den Mittelpunkt der Construktion zwei Linien, welche die Axenwinkel aob und $a'ob$ halbiren, so werden diese Linien, wenn Axe $a=b$, mit den Sektionslinien der Dodekaidflächen, welche der Axe c parallel gehen, zusammenfallen; wenn jedoch a gröfser oder kleiner als b, so ist dieses nicht der Fall; da die Ebene, welche durch diese Linie und den Punkt c geht, den Säulenwinkel der beiden Hexaidflächen halbirt, also mitten zwischen beiden liegt, so wollen wir sie *Mittelfläche* nennen. Sprechen wir daher von irgend einem bekannten Oktaide, so sind dadurch zugleich auch die 2 Hexaid-, 2 Dodekaid- und 2 Mittelflächen bekannt.

Diefs vorausgeschickt, finden nun möglicher Weise folgende acht Gruppen zu vier Statt.

Gruppe 1. Denken wir uns das Oktaid 111 (mit gleichen und rechtwinklichen Axen) nach der Axe c aufrecht!

a) Bewegen wir c in der Hexaidfläche, so erhalten wir das Oktaid 112, mit gleichen Axen, 2 rechten und 1 schiefen Axenwinkel.

b) Bewegen wir c in der Dodekaidfläche, so erhalten wir das Oktaid 122, mit gleichen Axen, 1 rechten und 2 gleichschiefen Axenwinkeln.

c) Bewegen wir c zwischen der Hexaid- und Dodekaidfläche, so erhalten wir 122', mit gleichen Axen, 1 rechten und 2 ungleichschiefen Axenwinkeln.

Gruppe 2. Denken wir uns das Oktaid 133 (mit 2+1 rechtwinklichen Axen) nach der ungleichen Axe c aufrecht, d. h. denken wir uns in 111 Axe c länger als a und b werden!

a) Bewegen wir *c* in der Hexaidfläche, so erhalten wir das Oktaid 134, 2+1axig mit 2 rechten und 1 schiefen Axenwinkel.

b) Bewegen wir *c* in der Dodekaidfläche, so erhalten wir das Oktaid 144, 2+1axig mit 1 rechten und 2 gleichschiefen Axenwinkeln.

c) Bewegen wir *c* zwischen Hexaid- und Dodekaidfläche, so erhalten wir 144·, 2+1axig mit 1 rechten und 2 ungleichschiefen Axenwinkeln.

Gruppe 3. Denken wir uns das Oktaid 112 (Gruppe 1. a.) mit seinem schiefen Axenwinkel in die Fläche gelegt, d. h. denken wir uns in 111 die Axenwinkel zwischen *a* und *b* schief!

In dieser Gruppe sehen wir, daſs die Axen *a* und *b* nicht mehr senkrecht auf die Hexaidflächen (Axenebenen *b c* und *a c*) stehen. Darnach modificiren sich die Unterfälle:

a) Bewegen wir *c* in der Hexaidfläche, so werden im Allgemeinen die Axenwinkel eben so ungleich, als wenn wir *c* zwischen Dodekaid- und Hexaidfläche bewegen würden. Daher erhalten wir das Oktaid 22·2··, mit gleichen Axen, aber ungleichschiefen Axenwinkeln.

Nur ein Punkt wird da sein, wo z. B. Axenwinkel $aob = aoc$ wird, dieſs gibt denn 222·, also das folgende Oktaid, nemlich:

b) Bewegen wir *c* in der Dodekaidfläche, so erhalten wir das Oktaid 222·, mit gleichen Axen und zwei gleichschiefen Axenwinkeln, nemlich $aoc = boc$. In dieser Bewegung giebt es endlich

c) einen Punkt, wo alle drei Axenwinkel gleich schief werden, also $aoc = boc = aob$, das gleichaxige Oktaid 222.

Gruppe 4. Denken wir uns das Oktaid 332 (2+1axig, mit

2 rechten und 1 schiefen Axenwinkel), d. h. denken wir uns in 112 die Axe *c* von *a* und *b* verschieden!

Für diese Gruppe gilt dieselbe Bemerkung wie in Gruppe 3., daher bekommen wir hier dieselben Fälle.

a) Bewegen wir *c* in der Hexaidfläche, so werden im Allgemeinen die Axenwinkel eben so ungleich, als wenn wir *c* zwischen Dodekaid- und Hexaidfläche bewegen würden. Daher erhalten wir das Oktaid 244·, 2+1axig, mit ungleichschiefen Axenwinkeln.

Nur ein Punkt wird da sein, wo z. B. Axenwinkel $aob = aoc$ wird, diefs gibt dann $2^{4}44\cdot$, also das folgende Oktaid, nemlich:

b) Bewegen wir *c* in der Dodekaidfläche, so erhalten wir das Oktaid 244, 2+1axig mit zwei gleichschiefen Axenwinkeln (44), nemlich $aoc = boc$. (Zeichen $2^{4}44\cdot$ ist $= 244$, denn $2^{4} = 4$ und $4\cdot = 2$). In dieser Bewegung giebt es endlich

c) einen Punkt, wo alle drei Axenwinkel gleichschief werden, also $aoc = boc = aob$, das 2+1axige Oktaid $2^{4}44$.

Gruppe 5. Denken wir uns das Oktaid 333 (mit ungleichen aber rechtwinklichen Axen) nach der Axe *c* aufrecht!

a) Bewegen wir *c* in der Hexaidfläche, so erhalten wir das Oktaid 334, mit ungleichen Axen, zwei rechten und einem schiefen Axenwinkel.

b) Bewegen wir *c* in der Mittelfläche, so erhalten wir das Oktaid 344, mit ungleichen Axen, einem rechten und 2 gleichschiefen Axenwinkeln.

c) Bewegen wir *c* zwischen der Hexaid- und Mittelfläche, so erhalten wir 344·, mit ungleichen Axen, einem rechten und 2 ungleichschiefen Axenwinkeln.

Gruppe 6. Stellen wir ein Oktaid 133 (Gruppe 2.) nach einer seiner gleichen Axe aufrecht!

a) Bewegen wir die aufrechte Axe (die auch wie vorher

c heifsen mag) in der Hexaidfläche, so erhalten wir das Oktaid 233 (Gruppe 4).

b) Bewegen wir *c* in der Mittelfläche, so erhalten wir das Oktaid 32'4, 2+1axig, mit einem rechten und 2 gleichschiefen Winkeln.

c) Bewegen wir *c* zwischen Hexaid- und Mittelfläche, so erhalten wir das Oktaid 234, 2+1axig, mit einem rechten und 2 ungleichschiefen Winkeln.

Gruppe 7. Denken wir uns das Oktaid 433 (Gruppe 5. a.) nach der Axe *c* aufrecht, d. h. denken wir uns in 333 *ab* schiefwinklich werden! So ist der Fall wieder der Gruppe 3. analog.

a) Bewegen wir *c* in der Hexaidfläche, so werden im Allgemeinen die Axenwinkel eben so ungleich, als wenn wir *c* zwischen Hexaid- und Mittelfläche bewegen würden. Daher erhalten wir das Oktaid 44·4·· mit ungleichen Axen und ungleichschiefen Axenwinkeln.

Nur ein Punkt wird da sein, wo z. B. Axenwinkel $aob = aoc$ wird; diefs giebt dann 444·, also das folgende Oktaid, nemlich:

b) Bewegen wir *c* in der Mittelfläche, so erhalten wir das Oktaid 444· mit ungleichen Axen und 2 gleichschiefen Axenwinkeln. In dieser Bewegung giebt es endlich

c) einen Punkt, wo alle 3 Axenwinkel gleichschief werden, also $aob = aoc = boc$, das ungleichaxige Oktaid 444.

Gruppe 8. Legen wir ein Oktaid 134 (Gruppe 2. a.) mit seinem rhomboidischen Basalschnitt 4 in die Ebene *ab* und nach seiner Axe $c = a$ aufrecht!

a) Bewegen wir *c* in der Hexaidfläche, so erhalten wir das Oktaid 244· (Gruppe 4. a.)

b) Bewegen wir *c* in der Mittelfläche, so erhalten wir

das Oktaid $24^24 = 2^444^{\cdot}$, $2+1$axig, mit zwei gleichschiefen Winkeln (Gruppe 4. b.).

c) Bewegen wir *c* zwischen Hexaid- und Mittelfläche, so erhalten wir das Oktaid 244· (Gruppe 4. a.).

Der befolgte Gang dieser Eintheilung leuchtet ein; wir haben auf jeden der vier basischen Schnitte (*ab*) eine Axe (*c*) im Mittelpunkt aufgesetzt, die einer oder beiden Diagonalen des basischen Schnittes gleich oder ungleich war. Daher $2.4 = 8$ Gruppen. Jede dieser Gruppen zerfällt durch die mögliche Bewegung von *c* in 3 Abtheilungen, daher $8 + 3.8 = 32$ Oktaide, von denen sich 8 wiederholen. Nämlich:

1. Gr.	2. Gr.	3. Gr.	4. Gr.	5. Gr.	6. Gr.	7. Gr.	8. Gr.
111	133	(112)	332	333	(133)	(334)	(134)
112	134	22·2··	244·	334	(233)	44 4··	(244·)
122	144	2·22	244	344	2^434	444·	($2^444^{\cdot}$)
122·	144·	222	2^444	344·	234	444	(244·).

Die eingeklammerten wiederholen sich.

Zusatz 2. Wir könnten diese Oktaide noch auf manche andere Weise gruppiren. Denken wir uns z. B. von drei gleichen rechtwinklichen Axen die *c* aufrecht, ziehen uns daran die Hexaidflächen (Axenebenen *ac* und *bc*), ferner die Mittelfläche, welche den Winkel beider Axenebenen halbirt, so können wir uns zu jeder Gröfse der Axenwinkel die Axenlängen *gleich*, *zwei gleich* von der dritten verschieden, und *ungleich* denken. Auf diese Weise müfsen wir ebenfalls alle Oktaide bekommen. Wir wollen die Axenwinkel mit α, β, γ bezeichnen, die respektive den Axenlinien *abc* gegenüber liegen sollen

1*ster Fall.* $\alpha = \beta = \gamma = R$ (rechter W.)

a) gleichaxig ... 111

b) $2+1$axig ... 133

c) ungleichaxig ... 333.

2*ter Fall.* $\gamma = \beta = R$, $\alpha = S$ (schiefer W.); diefs entsteht, wenn wir Axe *c* in der Hexaidfläche *bc* bewe-

gen. Denn da a auf Ebene bc senkrecht steht, so wird sie auch auf jeder Linie der Ebene senkrecht stehen, welche durch den Mittelpunkt geht; also a senkrecht auf c und auf b.

a) gleichaxig ... 112

b) 2 + 1axig; hier sind 2 Unterfälle möglich:

α) entweder denke ich c oder b ... 134

β) oder a ungleich ... 233

c) ungleichaxig ... 334.

3ter Fall. $\gamma = R$, $\alpha = \beta = S$; diefs entsteht, wenn ich c in der Mittelfläche bewege.

a) gleichaxig ... 122

b) 2+1axig; hier sind wieder zwei Unterfälle möglich:

α) entweder denke ich a oder b ... 2'34

β) oder c ungleich ... 144

c) ungleichaxig ... 344.

4ter Fall. $\gamma = R$, $\alpha = S$ und $\beta = S$, aber ungleich; diefs entsteht, wenn wir c zwischen Hexaid und Mittelfläche bewegen.

a) gleichaxig ... 122·

b) 2 + 1axig; hier sind nochmals zwei Unterfälle möglich:

α) entweder denke ich a oder b ... 234

β) oder c ungleich ... 144·

c) ungleichaxig ... 344·.

5ter Fall. $\alpha = \beta = \gamma = S$; diefs entsteht, wenn ich c in der Mittelfläche, und die Axen a und b um gleiche Gröfsen zur Mittelfläche bewege.

a) gleichaxig ... 222

b) 2 + 1axig ... 2'44

c) ungleichaxig ... 444.

6ter Fall. $\gamma = \beta = S$, $\alpha = S$, aber von den ersten verschieden; diefs entsteht, wenn ich c in der Mittelfläche, und a und b zur Mittelfläche beliebig bewege.

a) gleichaxig ... 222·

b) 2+1axig; hier sind abermals zwei Fälle möglich:

α) entweder denke ich a oder b ... $44^{2}2 = 4{\cdot}42^{4}$ (cf. Gruppe 8. b.)

β) oder c ungleich ... 244

c) ungleichaxig ... 444·

7ter Fall. $\gamma = S$, $\beta = S$, $\alpha = S$, aber alle ungleich; diefs entsteht, wenn ich c im 5ten Fall zwischen Hexaid- und Mittelfläche bewege.

a) gleichaxig ... 22·2··

b) 2+1axig ... 244·

c) ungleichaxig ... 44·4··.

So sehen wir abermals dieselben Oktaide entwickelt. Wer die Schwierigkeit kennt, mit welcher sich der Anfänger die schiefwinklichen Axen veranschaulicht, der wird gern bei diesen Sätzen des Oktaides länger verweilen, um sich von allen Seiten mit dem Eintheilungsprincip vertraut zu machen. Dem Unbefangenen leuchtet aber ein, dafs wenn wir blos auf die Gleichheit und Ungleichheit der Winkel und Axenlängen sehen, kein Oktaid vor dem andern Behufs der Systematik einen Vorzug verdient, vielleicht mit Ausnahme der rechtwinklichen. Wollten wir also konsequent schematisiren, so gäbe es 24 Systeme.

§. 18.

Theilen wir die Kanten nach Gleichheit und Ungleichheit ein, so sind 10 *Gruppen von Oktaiden möglich.*

Das Oktaid hat 6 Richtungen oder 6 vierseitige Säulen (Kanten, wenn wir die Parallelen nicht mitzählen), durch deren Winkel es bestimmt wird. Spricht man bei einem Oktaide im Gleichgewicht von gleichen Kanten, so kann man zunächst die Längen der Kantenlinien meinen (wie wir es §. 16. *Zusatz* genommen haben, weil die basischen Schnitte nur über die absolute Länge der Kantenlinien Auskunft geben). Dann kann man aber auch Rück-

sicht auf den Winkel (Säulenwinkel) nehmen, welchen die sich in der Kantenlinie schneidenden Flächen einschliefsen. Häufig, doch nicht immer, fallen beide Fälle zusammen. Die Fälle zu ermitteln ist sphärische Trigonometrie erforderlich, wir müssen daher auf den rechnenden Theil verweisen. Wenn wir jedoch im Allgemeinen von gleichen Kanten sprechen, so wollen wir darunter Kanten mit gleichlangen Kantenlinien und gleichgradigen Kantenwinkeln verstehen.

Bezeichnen wir die Kanten, so oft sie ungleich sind, mit 1, und so oft mehrere gleich werden, mit der den gleichen Kanten entsprechenden Zahl, wie das schon oben geschah, so erhalten wir folgende Gruppen:

1. Gruppe: $1+1+1+1+1+1$ kantige
2. Gruppe: $2+1+1+1+1$ —
3. Gruppe: $2+2+1+1$ —
4. Gruppe: $2+2+2$ —
5. Gruppe: $3+1+1+1$ —
6. Gruppe: $3+2+1$ —
7. Gruppe: $3+3$ —
8. Gruppe: $4+1+1$ —
9. Gruppe: $4+2$ —
10. Gruppe: $5+1=6$ —; d. h. fünf Kanten können nicht unter einander gleich werden, ohne dafs nicht auch die sechste den übrigen gleich würde.

Wir wollen nur einige Fälle untersuchen, können dabei die Andeutungen über Kantenlängen §. 16. *Zusatz* benutzen. Zunächst bemerken wir, dafs es sich bei den einzelnen Gruppen immer darum handelt, ob die gleichen Kanten in einem Basalsschnitte liegen, oder in mehreren.

10. Gruppe: $5+1=6$ kantig. A. §. 42. haben wir gesehen, dafs jedes Oktaid durch 5 Säulenwinkel mathematisch bestimmt wird, daher folgt die Gröfse des sechsten, man kann sie nicht mehr willkührlich annehmen. Es ist diefs das Oktaid 111 mit drei kongruenten quadratischen

Basalschnitten. Die gleichen Kanten fallen mit den gleichwinklichen Säulen zusammen *(reguläres Oktaeder)*.

9. Gruppe: 4+2 kantig. In §. 16. *Zusatz* lernten wir nur das eine Oktaid 133 mit solcher Beschaffenheit kennen. Man kann nun auch leicht beweisen, dafs kein anderer Fall denkbar ist. Denn liegen zuerst die 2 gleichen Kanten in einem Basalschnitt, so kann dieser ein Quadrat (1) oder Rhombus (3) sein. Wäre er ein Rhombus, so liefsen sich damit nicht die 4 gleichen Kanten verbinden; folglich mufs er ein Quadrat sein, mit welchem sich zwei kongruente rhombische Schnitte (33) verbinden lafsen. Liegen die 2 gleichen Kanten in verschiedenen Basalschnitten, so müfste von den 4 gleichen wenigstens ein Paar *einem* Basalschnitte angehören, der also ein Quadrat oder Rhombus wäre. Die übrigen beiden Schnitte müfsten kongruente Oblonge oder Rhomboide sein; wir hätten also: 122, 144, (322), 344, worin aber die Schnitte der beiden letzten Zahlen mit denen der ersten Zahl eine Seite gemein haben. 322 ist an sich nicht möglich, weil 22 gleiche Axen, 3 aber ungleiche voraussetzen; 122 ist zwar vorhanden, allein nach §. 16. *Zusatz* kann keine Kante des Basalschnitts 2 einer Kante des Basalschnitts gleich lang werden; in 344 können die 44 nicht kongruent werden, weil 3 ungleiche Diagonalen hat; folglich bleibt als einziger denkbarer Fall 144 über, und hieraus kann allerdings ausnahmsweise (§. 16. *Zusatz*) ein 4+2 kantiges Oktaid entstehen.

Jetzt würde nun noch die weitere Untersuchung folgen, *ob* die 4+2 kantigen Oktaide (welche Untersuchung sich blos auf die Kantenlänge bezieht) zu gleicher Zeit auch 4+2 Kantenwinkel haben oder *nicht*, und *welche?* Hier zeigt sich dann, dafs im Oktaide 133 die gleichlangen Kanten mit den gleichgradigen Kantenwinkeln zusammenfallen *(Quadratoktaeder)*; aber nicht so in 144.

In ähnlicher Weise liefsen sich nun alle Gruppen analysiren, allein es häufen sich die Möglichkeiten und folglich

auch die Schwierigkeiten, je ungleicher die Kanten untereinander werden.

8. Gruppe: 4+1+1 kantig. Wir sehen in Rücksicht auf Kantenlänge die Oktaide 112 und 233 diesem entsprechen; denn 2 bezeichnet ein Oblong (also Kanten 1+1), 33 und 11 aber kongruente Rhomben und Quadrate, daher liegen auch 4 gleichlange Kanten im Zeichen. Auch in diesen Oktaiden fallen gleiche Kantenlängen und Kantenwinkel zusammen; man nennt beide *Oblongoktaeder*, weil ein Basalschnitt ein Oblongum ist.

7. Gruppe: 3+3 kantig. Diesem entsprach nur das einzige Zeichen 222, mit drei kongruenten Oblongen. Daraus geht hervor, dafs nie zwei gleiche Kanten einem Schnitte angehören können. Da aber jede Oktaidfläche von drei verschiedenen Basalschnitten begränzt wird, so müssen die Dreiecke des Oktaides gleichschenklich oder gleichseitig sein. Die gleichlangen Kanten entsprechen auch gleichen Kantenwinkeln. Es ist das Oktaeder des rhomboedrischen Systemes, *dreigliedriges Oktaeder*

6. Gruppe: 3+2+1 kantig. Wir können die 2 gleichen in einen Schnitt legen, Rhombus (3), dann einen zweiten Rhombus (3) wählen, worin zwei der 3 gleichen Kanten liegen mögen, verbinden wir dann mit beiden Rhomben (33) ein Rhomboid (4) so, dafs eine Rhomboidseite einer Seite der Rhomben 33 gleich wird, so haben wir ein Oktaid 334, das möglicher Weise 3+2+1 kantig ist. Auch 134 haben wir als ein solches kennen gelernt etc. ...

5. Gruppe: 3+1+1+1 kantig. Wir denken uns drei Rhomboide, wovon jedes nur eine Seite mit den andern gemein hat. Oder wir legen zwei in einen Rhombus, nehmen ein Rhomboid, das mit dem Rhombus eine Seite gleich hat, und fügen zu diesen beiden ein Rhomboid oder Rechteck, das keine Seite mit beiden gemein hat. So sehen wir auch 144 zuweilen mit der verlangten Eigenschaft etc. ...

4. Gruppe: 2+2+2 kantig. 333, 122 und 144 haben wir als solche kennen gelernt. Vorzüglich verdient das erste ausgezeichnet zu werden, mit rechtwinklichen Axen, und von seinen Rhomben in den Basalschnitten auch *Rhombenoktaeder* oder *zweiundzweigliedriges Oktaeder* genannt, worin den gleichen Kantenlängen auch gleiche Kantenwinkel entsprechen.

3. Gruppe: 2+2+1+1 kantig. Eine ganze Reihe lernten wir kennen: 134, 222·, 244, 2⁴44, 334, von denen nur das letztere ausgezeichnet zu werden verdient; von dem einzigen rhomboidalen Schnitte (4) *Rhomboidoktaeder* (zweiundeingliedriges Oktaeder) genannt; die Kantenwinkel richten sich nach den Kantenlängen.

2. Gruppe: 2+1+1+1+1 kantig. Hierher gehören: 112·, 144·, 234, 2⁴43, 344 und 344. Keines davon verdient ausgezeichnet zu werden.

1. Gruppe: 1+1+1+1+1+1 kantig. Sie begreift das allgemeinste Oktaid 44·4··, *Einundeingliedriges* genannt. Natürlich gehören hier auch 444·, 444 und 22·2·· hin.

Dafs die Eintheilung der Oktaide nach der Kantengröfse nicht mit der Eintheilung nach den basischen Schnitten zusammen fallen kann, leuchtet ein, da die Kanten eine Funktion (abhängig) von den Axenlängen und Axenwinkeln sind. Erst in der rechnenden Krystallographie kann hierüber hinlängliche Rechenschaft gegeben werden. Wir haben alle diese Eintheilungsmethoden nur der Consequenz wegen aufgeführt, auch liefern sie Uebungsbeispiele für den ersten Unterricht.

Zusatz. Bis jetzt wurden die Oktaide nur mathematisch nach der Gleichheit und Ungleichheit eingetheilt. Diefs konnte auch nur geschehen, weil wir an den basischen Schnitten und Kanten keine physikalischen Qualitäten auffinden. Diefs ist auch der Grund, warum wir noch nicht zur wahrhaften Einheit des Systemes gekommen sind. Die physikalischen Eigenschaften sind nur an den Kry-

stallräumen zu finden, daher mufs das Princip der Gleichheit und Ungleichheit, auf die Krystallflächen angewendet, uns alle Systeme geben, die in der Natur auftreten.

§. 19.

Nach der physikalischen Gleichheit und Ungleichheit der Oktaidflächen sind 5 Gruppen möglich:

1) 4*räumige, d. i. gleichflächige*	
2) 3+1*räumige, d. i. drei und einflächige*	
3) 2+2*räumige, d. i. zwei und zweiflächige*	*Oktaide.* *(Oktaeder).*
4) 2+1+1*räumige, d. i. zwei und einflächige*	
5) 1+1+1+1*räumige, d. i. ein und einflächige*	

Diese Eintheilung ergibt sich von selbst aus der Anzahl der Krystallräume. Denn wenn ich vier Gröfsen nach unserem Principe eintheile: so können sie alle viere in allen ihren Eigenschaften gleich sein (gleichblättrige, gleichglänzende, gleich gestreifte Flächen); oder 3 sind unter sich gleich, vom vierten aber verschieden; oder 2 sind gleich, und 2 andere auch, beide Paare aber unter sich verschieden; oder es wird eines der zwei Paare ungleichflächig; oder endlich alle ungleich. Ein 6ter Fall ist nicht denkbar.

§. 20.

Krystallräume sind stets physikalisch gleich, wenn ihre Gränzflächen am Oktaide im Gleichgewicht als kongruente Dreiecke erscheinen.

Dieser Satz kann nicht bewiesen werden, sondern die Natur beweist ihn dadurch, dafs sie die Körper nie anders in die Erscheinung treten läfst. Der Satz gilt auch umgekehrt: *sind die Oktaederflächen nicht kongruent, so sind auch die ihnen zugehörigen Krystallräume nicht gleich.* Er ist vorzüglich zu beherzigen, denn wir lernen durch ihn, wie die Beschaffenheit der Krystallräume mit der mathematischen Form im engsten Zusammenhange steht.

§. 21.

Die gleichflächigen Oktaeder haben rechtwinkliche Axen, und zerfallen nach der Beschaffenheit ihrer sie begränzenden Dreiecke in Oktaeder:

1) *mit gleichseitigen Dreiecken (Reguläroktaeder),* gleichaxig;
2) *mit gleichschenklichen Dreiecken (Quadratoktaeder),* 2 und 1axig;
3) *mit ungleichseitigen Dreiecken (Rhombenoktaeder),* ungleichaxig.

Ein genaueres Nachdenken zeigt uns bald, dafs die vier Dreiecke des Oktaeder nur dann kongruent bleiben können, wenn ihre basischen Schnitte Quadrate, Quadrat und Rhomben oder Rhomben sind. Denn sollen die Dreiecke des Oktaeder sich decken, so müssen ihre sämmtlichen Seiten respektive unter einander gleich sein. Alle vier Dreiecke müssen daher eine gleiche Kante gemein haben. Die gleiche Kante kann aber allen vier Dreiecken nur unter der Voraussetzung gemein sein, dafs die vier Dreiecke in ein und demselben basischen Schnitte liegen, weil der basische Schnitt jede der vier Flächen berührt. Aber nur das Quadrat und der Rhombus haben die Eigenschaft, dafs ihre zwei Seiten unter sich gleich sind, daher dürfen sie allein in unserer Oktaedergruppe auftreten. Die Diagonalen der Quadrate und Rhomben schneiden sich aber stets rechtwinklich, daher müssen alle Axen auf einander rechtwinklich stehen.

Sind die Dreiecke gleichseitig (ist das Oktaeder regulär), so müssen nothwendig die drei Schnitte Quadrate sein, denn nur unter dieser Voraussetzung sind alle Dreiecksseiten gleich.

Sind die Dreiecke gleichschenklich, so müssen die beiden gleichen Schenkel durch zwei kongruente basische Schnitte gebildet werden; wählten wir zu diesen Quadrate, so müfste im einen $a=b$, im andern $a=c$ sein, daher $b=c$,

d. h. dann wäre auch der dritte Schnitt stets ein Quadrat, und wir hätten das reguläre Oktaeder, was wir nicht wollen. Daher dürfen wir nur zwei kongruente Rhomben wählen; sind aber die beiden Rhomben kongruent, so sind auch ihre Diagonalen gleich. Die Diagonalen des einen seien c und a, dann sind die Diagonalen des andern ebenfalls c und a, die Diagonalen $c \ldots c$, oder $a \ldots a$ (welche man wählen will) sind aber die Diagonalen des dritten Schnittes, daher mufs dieser ein Quadrat sein. Das Oktaeder hat also zwei kongruente Rhomben und ein Quadrat zu basischen Schnitten, d. h. 2 gleiche Axen, welche von der dritten verschieden sind. Wegen des einen quadratischen Schnittes nennt man es *Quadratoktaeder*.

Sind die Dreiecke ungleichseitig, dann sind die drei Schnitte ungleiche Rhomben, weil von jedem Rhombus dem Dreiecke eine Seite angehört. Ungleiche Rhomben haben aber ungleiche Diagonalen, daher sind die drei Axen dieses Oktaeders verschieden, das wegen seiner 3 basischen Schnitte *Rhombenoktaeder* genannt ist. Diese rechtwinklichaxigen (orthometrischen) Oktaeder sind es, welche in der Systematik den ersten Platz einnehmen.

§. 22.

Die drei und einflächigen Oktaeder haben drei gleiche Axen, die sich unter gleichen schiefen Winkeln schneiden, sie bilden eine Gruppe mit drei gleichschenklichen, unter sich kongruenten, Dreiecken und einem gleichseitigen Dreiecke (rhomboedrisches oder dreigliedriges Oktaeder).

Legen wir irgend ein Oktaid (Tab. IV. Fig. 18.) auf eine Fläche (a), so liegt die Fläche, wie jede, in drei basischen Schnitten. Sollen nun die drei ihr anliegenden Flächen (b, c, d), der Voraussetzung gemäfs, unter sich kongruent werden, so müssen zuerst die Kanten (α, β, γ), welche sie mit dem ihnen ungleichen Dreiecke (a) machen, unter sich gleich sein $\alpha = \beta = \gamma$. Damit ferner die übrigen

Kanten der anliegenden Dreiecke ($\delta\varepsilon$, $\zeta\varepsilon'$, $\delta'\zeta'$) respektive einander gleich werden, so legen wir erst einen basischen Schnitt durch $\alpha\zeta'\zeta$, dann wird $\zeta'=\zeta$ in den beiden Dreiecken b und d; dieselbe Kante mufs auch in das Dreieck c kommen, daher legen wir uns einen zweiten Schnitt durch β, defsen Seiten δ und δ' den Kanten $\zeta'\zeta$ gleich sein müssen. Dadurch hat das Dreieck $\gamma\delta'\zeta'$ aber zwei gleiche Schenkel $\delta'=\zeta'$ bekommen, daher mufs auch der dritte Schnitt $\gamma\varepsilon\varepsilon'$ so beschaffen sein, dafs ε und ε' die andern beiden Dreiecke zu gleichschenklichen machen, d. h. die drei Basalschnitte müssen unter sich kongruent sein. Quadrate dürfen es nicht sein, sonst wäre das Dreieck regulär. Drei kongruente Rhomben und Rhomboide sind unmöglich (weil zwei kongruente Rhomben oder Rhomboide den dritten Schnitt als Quadrat oder Rechteck bestimmen), folglich können die Schnitte nur drei kongruente Rechtecke sein. In drei kongruenten Rechtecken sind aber die Diagonalen gleich lang, und schneiden sich unter gleichen Winkeln, wie es der Satz behauptet.

§. 23.

Die zwei und zweiflächigen Oktaeder haben zwei rechtwinkliche und eine schiefwinkliche Axe; sie zerfallen nach der Beschaffenheit ihrer sie begränzenden Dreiecke in Oktaeder

1) *mit zwei und zwei ungleichseitigen (Rhomboidoktaeder), und*
2) *mit zwei und zwei gleichschenklichen Dreiecken (Oblongoktaeder).*

Denken wir uns das Oktaid (Tab. IV. Fig. 19.) nach einer Axe aufrecht, so können von den die aufrechte Axe umlagernden 4 Flächen zwei einer Kante inliegende, oder zwei in der Ecke sich gegenüberliegende gleich sein. Diese beiden Fälle fallen jedoch stets in einen zusammen. Denn hätten wir gegenüberliegende Flächen gleich ($\alpha=\gamma$), so dürfen wir nur statt der einen (α) des einen Paares die

parallele (a') nehmen, so ist das Paar ($\gamma a'$) einer Kante (bc) anliegend geworden; wollen wir nun im zweiten Paare ($\beta\delta$) auch statt einer (β) die Parallele nehmen, so können wir diese immer so wählen (β' statt β), daſs das andere Paar ($\beta'\delta$) gleichfalls einer Kante ($b'c$) anliegend wird. Oder kurz: *Sind in einem Oktaide zwei Krystallräume der Kante* $\overline{|a:c|}$ *anliegend, so sind sie für die aufrechte Axenstellung von a und c anliegend, für die von b aber gegenüberliegend.* Daher dürfen wir unsern Satz nur für anliegende Flächen beweisen. Ist Fläche $\overline{|a:b:c'|}$ kongruent $\overline{|a':b:c'|}$ und $\overline{|a:b:c|}$ kongruent $\overline{|a':b:c|}$, so ist jenen Flächen die Kante $\overline{|b:c'|}$ gemein, diesen $\overline{|b:c|}$; ferner muſs $ab = a'b$, und $ac' = a'c'$ sein, wenn Dreieck abc' dem Dreieck $a'bc'$ kongruent sein soll; ebenso ist durch $ac = a'c$ Dreieck abc dem $a'bc$ kongruent. Wollten wir etwa in den Dreiecken abc' und $a'bc'$, denen Kante bc' gemein ist, $ab = a'c'$ setzen, so müſste $ac' = ba'$ sein und die Dreiecke wären kongruent. Allein dann wäre $ac' = a'c = ba'$, und $a'c' = ac = ab$, es wären daher die Dreiecke acb und $a'cb$ gleichschenklich aber nicht mit einander kongruent, was gegen die Voraussetzung ist. Daher dürfen wir die Kanten nur in der ersten Weise gleichgesetzt denken. So lange die beiden Paare von Dreiecken ungleichseitig sind, wird obigen Bedingungen allein genügt, wenn die Basalschnitte $aba'b'$ und $aca'c'$ unter sich ungleiche Rhomben sind, der Schnitt $bcb'c'$ aber ein Rhomboid ist; die Rhomben setzen aber rechtwinkliche Diagonalen, das Rhomboid schiefwinkliche voraus, daher müssen 2 Axen auf einander rechtwinklich, die beiden andern schiefwinklich sein. Sind die beiden Paare von Dreiecken gleichschenklich, so sind die Rhomben kongruent, folglich die Diagonalen derselben gleich; es ist also Axe $bb' = cc'$, daher ist in diesem Falle das Rhomboid ein Rechteck (Oblongum); ein solches Oktaeder heiſst

Oblongoktaeder. Da das Oblongoktaeder ein Deduktionskörper ist (§. 30.), so gehört es nicht in die oktaedrische Systematik, es bleibt daher für die Systematik nur das eine Rhomboidoktaeder mit ungleichen Axen übrig.

Zusatz 1. Dächten wir uns im Oblongoktaeder auch die dritte Axe (a den b und c) noch gleich werden, so würden die beiden kongruenten Rhomben zu Quadraten. Auf die Oktaederflächen selbst aber hätte diefs keinen Einflufs, die Dreiecke blieben gleichschenklich vor wie nach. Daher ist bei dem Monoklinometrischen Systeme (mit einer geneigten Axe) nur ein Oktaid mit ungleichen Axen systematisch möglich, weil die beiden Oblongoktaeder (2 und 1axige und gleichaxige) als Deduktionskörper betrachtet werden müssen.

Zusatz 2. Um ein 2+1+1flächiges Oktaeder zu bekommen, darf man nur die Axe a (Tab. IV. Fig. 19.) im Oblongoktaeder gegen c und b so bewegen, dafs Axenwinkel ac dem Axenwinkel ab gleich bleibt. Alsdann mufs auch Kante $ab = ac$ sein, wie Kante $ac' = ab'$, die erstern beiden aber von letztern beiden verschieden, so dafs Dreieck $ab'c'$ dem Dreiecke abc ungleich ist. Dreieck abc' und $ab'c$ bleiben aber noch unter einander kongruent. Da man jedoch auch dieses Oktaid als einen Deduktionskörper des 2 und 1gliedrigen Systems betrachten kann, so hat er auf die Systematik keinen Einflufs.

§. 24.

Die ein und einflächigen Oktaeder haben zwei schiefwinkliche und eine rechtwinkliche oder drei schiefwinkliche Axen. Die Dreiecke sind sämmtlich ungleichseitig und keines dem andern kongruent.

Wenn die Dreiecke sämmtlich ungleich sind, so sind die drei basischen Schnitte im Allgemeinen Rhomboide. *Ein* Rhombus darf jedoch dabei sein. Denn läfst man ihn auftreten, so erhalten durch ihn alle Flächen eine gleich lange

Kante; liefs man noch einen zweiten Rhombus hinzutreten, so erhielten durch diesen alle Flächen eine zweite Kante gemein, es hätten demnach die vier Dreiecke unter sich schon zwei gleiche Kanten; mag nun auch der dritte Schnitt ein Rhomboid sein, so werden durch ihn doch je zwei Flächen kongruent, da je zwei in einer Rhomboidkante liegen müssen. Wir dürfen demnach, um der Voraussetzung nicht zu widersprechen, nie zwei Rhomben zugleich auftreten lassen, daher kann höchstens nur eine rechtwinkliche Axe vorhanden sein.

Auch hier können zwei der Dreiecke gleichschenklich werden, doch aber nicht unter sich gleich. Man kann solche als Deduktionskörper ansehen, daher kommen dergleichen Unterfälle nicht in die systematische Betrachtung.

§. 25.

Aus dem Princip der Gleichheit und Ungleichheit auf die physikalische Beschaffenheit der Krystallräume angewendet ergeben sich daher nur 6 Oktaeder, die Repräsentanten eben so vieler Systeme.

1) *Das Reguläroktaeder* (111), 6kantig, gleiche rechtwinkliche Axen: Gleichgliedriges System;
2) *Das Quadratoktaeder* (133), 4+2kantig, 2+1rechtwinkliche Axe: Viergliedriges System;
3) *Das Rhombenoktaeder* (333), 2+2+2kantig, 1+1+1 rechtwinkliche Axen: Zweigliedriges System;
4) *Das Rhomboedrische Oktaeder* (222), 3+3kantig, gleichaxig und gleichschiefe Axenwinkel: Dreigliedriges System;
5) *Das Rhomboidoktaeder* (334), 2+2+1+1 kantig, ungleichaxig, 2 rechte und 1 schiefer Axenwinkel: Zwei und eingliedriges System;
6) *Das schiefe Oktaeder* (44·4··, 344·), 1+1+1+1+1+1 oder 2+1+1+1+1 kantig, ungleiche schiefwinkliche Axen: Eingliedriges System.

Ausser diesen ist kein System denkbar; wenn noch andere Systeme angegeben werden, so beruhen diese auf mathematischen Abstraktionen (so könnten wir jedes der 24 Oktaide §. 17 als den Repräsentanten eines besonderen Systemes ansehen wollen), oder auf Folgerungen, die aus den Deduktionskörpern erschlossen sind. Wenn jedoch das Oktaid der systematische Körper ist, so kann auf das Oktaid unmittelbar kein anderes mehr begründet werden.

Zusatz. Wir können vorstehende 6 Oktaeder nur als systematische Körper betrachten, weil sie allein gegenseitig von einander unabhängig erscheinen; d. h. greife ich in irgend einem Systeme ein dem System angemessenes Oktaeder (im viergliedrigen Systeme ein viergliedriges Oktaeder, im zweigliedrigen ein zweigliedriges etc.) heraus, und deducire aus solchem alle übrigen Flächen des Systemes nach Anleitung der Zonenlehre, so können unter diesen Deduktionsflächen sich nie vier Flächen (Krystallräume) finden, die unter sich nochmals ein einem der 6 Oktaeder gleiches Oktaeder bildeten. Wollten wir hingegen das Oblongoktaeder und das 2+1+1flächige noch als die Körper eines besondern Systemes betrachten, so würden wir finden, dafs sich unter besondern Bedingungen aus denselben Oktaeder deduciren lassen, welche einem der 6 Oktaeder gleich werden können, so dafs man diese letztern beiden Oktaeder als Deduktionskörper betrachten mufs, und zwar als Oblongoktaeder aus dem zweigliedrigen, das 2+1+1flächige aus dem 2+1gliedrigen.

§. 26.

Flächen, Kanten, Ecken, Basalschnitte, sämmtlich durch die Flächen eingesetzt, werden Glieder des Oktaides genannt; sie alle können nach dem Princip der Gleichheit und Ungleichheit eingetheilt werden.

Die Flächen bilden die unmittelbaren Begränzungen der Krystallräume, die Kanten sind durch 2 Flächen erst eingesetzt. Kanten können 1) nach ihrer absoluten Länge,

2, nach dem Winkel, welche die beiden in ihnen liegenden Flächen bilden, betrachtet werden. Die Basalschnitte hängen von den Kanten ab, und die Ecken sind die Glieder, an welchen Flächen, Kanten und Basalschnitte zusammentreffen; sie verbinden daher alle Glieder, und bekommen deshalb bei der Systematik ein besonderes Gewicht.

§. 27.

Alle Deduktionsflächen des Oktaides, welche gegen gleiche Oktaidglieder in gleicher Symmetrie (homolog) liegen, sind physikalisch gleich.

Die Zonenpunkte der Projektionsebene zeigen diese Symmetrie aufs Deutlichste. Wenn die Flächen gegen zwei Kanten in gleicher Symmetrie liegen sollen, so müssen auf ihren Sektionslinien dieselben Zonenpunkte zu finden sein. So zeigen z. B. alle Sektionslinien des Hexaides, Dodekaides, Icositetraides etc. (Tab. I.) jede Gruppe unter sich, ganz dieselben Punkte. Werden nun einige Kanten des Oktaides, gegen welche jede Gruppe für sich eine bestimmte Symmetrie zeigt, gleich, so werden auch die gegen sie symmetrisch liegenden Flächen gleich sein. Am Oktaide erscheinen solche Flächen als gleichartige Zuschärfungs- und Abstufungsflächen. Wenn z. B. die vier Endkanten des Oktaides unter sich gleich sind, so müssen auch die vier Dodekaidflächen, welche aus dem Oktaide deducirt die vier Endkanten abstumpfen, unter sich gleich sein, weil ihre vier Sektionslinien gleiche Symmetrie gegen die Kanten zeigen etc.... Man sagt, die Deduktionsflächen verhalten sich gleichmäfsig gegen ihre Glieder, oder es sind homologe Flächen.

§. 28.

Das Reguläroktaeder hat ein gleichwinklich gleichflächiges Hexaid (Würfel), und ein gleichflächiges Dodekaid zu Deduktionskörpern.

Jede Hexaidfläche geht einem Basalschnitte, folglich auch den Diagonalen des Basalschnittes parallel. Je zwei

Hexaidflächen laufen daher einer Diagonale zweier Basalschnitte parallel, daher machen die Hexaidkanten unter sich dieselben Winkel, wie die Diagonalen der Basalschnitte (A. §. 50.). Die Kanten des Hexaides sind also rechtwinklich. Zu gleicher Zeit sind die Hexaidflächen physikalisch gleich, weil sie gegen die gleichen Ecken des Oktaeders eine homologe Lage haben. Ein solches Hexaid heifst *Hexaeder oder Würfel.* Nur im regulären Systeme, ist der Würfel möglich, weil hier der rechtwinkliche Körper allein 3 physikalisch gleiche Flächen haben kann. Die 3 Ecken des zugehörigen Oktaeders sind 4kantig (d. h. gleichkantig). Aus denselben Gründen ist das Dodekaid, wodurch die Oktaidkanten abgestumpft werden, physikalisch gleichflächig (wir sagen später schlechtweg gleichflächig), da die abgestumpften Oktaederkanten alle gleich sind. Die physikalische Gleichheit spricht sich im Ansehen der Flächen, wie beim Granat der Fall ist, oder im blättrigen Bruche, wie bei der Blende, am deutlichsten aus. Da der Körper vorzüglich beim Granat gefunden wird, so heifst das Dodekaid des regulären Systems vorzugsweise *Granatoeder.* Wenn alle Flächen physikalisch gleich sein sollen, so müssen die 4 sechsseitigen Säulen reguläre sein. Und im rechnenden Theile werden wir auch sehen, dass alle Winkel der sechsseitigen Säulen 120° betragen. Die Flächen sind einander gleichwinkliche Rhomben mit 120°. Die Zonenverhältnisse des Granatoeders sind natürlich genau die des Dodekaides.

Zusatz 1. Das Granatoeder (Tab. V. Fig. 3.) ist vor allen Krystallkörpern durch seine grofse Symmetrie ausgezeichnet. Erstlich sind drei symmetrische Stellungen nach den 4kantigen (Oktaeder) Ecken möglich; vier nach den 3kantigen (Rhomboedrischen) Ecken; sechs nach den Krystallräumen, je nachdem der eine oder der andere horizontal gedacht wird; und ebenso 12 nach den Kanten. Symmetrische Stellungen haben nämlich die Krystalle dann,

wenn ihre homologen Gliedertheile von einer Medianebene (symmetrischen Halbirungsebene) gleich weit entfernt stehen, die Entfernungen auf den Richtungen der Axen gemessen, immer vorausgesetzt, dafs der Körper sich im Gleichgewicht befindet. Wegen dieser grossen Symmetrie spielt das Granatoeder, wie die Dodekaide überhaupt, eine sehr wichtige Rolle nicht nur in der Mineralogie, sondern auch bei den Thier- und Pflanzenzellen. Das Dodekaid ist unter den Körpern mit 4, 6, 12 und 24 Krystallräumen der einzige, welcher, in mehreren Individuen an einander gereiht, den Raum stetig erfüllen kann. Denn stellen wir ein Dodekaid nach einer sechsseitigen Säule aufrecht, so können wir an die Flächen dieser Säule 6 andere gleiche Individuen stellen (Tab. I. Fig. C.). Diese 6 Individuen werden 6 einspringende Winkel bilden, in welche wieder 6 andere Individuen hineinpassen, so dafs der ganze Raum nach der Horizontalfläche stetig erfüllt wird. An beiden Oberflächen dieser Säulengruppen erheben sich die hexaidischen (dreiflächigen) Endigungen der Säulen, diese lassen zwischen sich ganz ähnliche Vertiefungen, so dass in jede Vertiefung ein neues Dodekaid mit seiner dreiflächigen Endigung versenkt werden kann. Alle diese Hexaide berühren sich mit ihren Säulen ebenfalls wieder unter einander, so dafs wir wie in der horizontalen, so auch in der vertikalen Richtung den Raum vollkommen ausgefüllt sehen. Wenn wir eine solche Aneinanderreihung von Individuen überschauen, so findet sich, dafs die 6 Krystallräume jedes Individuums mit den 6 Krystallräumen irgend eines andern respective zusammenfallen. Man kann also die ganze Gruppe durch Bewegung der Reduktionsebenen von 6 Krystallräumen entstehen lassen. Die Natur konnte daher keinen zweckmässigern Weg einschlagen, als wenn sie die Materie der Organismen in dodekaedrische Räume organisch sonderte. Zwar können auch die Hexaide (die Körper von 3 Krystallräumen) den Raum stetig erfüllen, allein die

Körper liegen nur horizontal neben einander verbreitet, ihre Theile greifen nicht, wie beim Dodekaide in der Vertikale durch dreiflächige Spitzen, in einander ein, sondern sie werden hier nur durch eine Fläche begränzt. Die Hexaide bieten daher nicht so viel Oberfläche zur gegenseitigen Verbindung dar, als die Dodekaide.

Zusatz 2. Weil beim regulären Oktaeder alle Flächen, Kanten, Ecken und Basalschnitte, also alle Glieder gleich sind, und zwar in jeder beliebigen Stellung, so heifst man es *gleichgliedrig*, und das ganze System, *Gleichgliedriges*. Diese Gleichheit wird noch dadurch ganz hervorstechend, dafs die Würfelflächen, sowie auch die Granatoederflächen durchaus unter sich gleich sind; tritt eine Würfelfläche auf, so treten sie alle auf, und tritt eine Granatoederfläche auf, so treten sie alle 6 auf. Es findet sich daher nie eine Ecke, oder eine Kante abgestumpft, sondern wenn eine derselben abgestumpft ist, so sind sie alle abgestumpft, immer mit der Beschränkung verstanden, die wir stets bei den Krystallen finden, dafs nemlich zufällig, aber nicht gesetzlich, eine fehlen kann.

§. 29.

Das viergliedrige Oktaeder hat ein gleichwinklich zwei- und einflächiges Hexaid, und ein vier- und zweiflächiges Dodekaid zu Deduktionskörpern.

Da das viergliedrige Oktaeder (133, §. 16.) vier gleiche Endkanten und zwei gleiche Seitenkanten hat, also 4 und 2kantig ist, so folgt daraus zunächst, dass eine Ecke 4kantig (d. h. gleichkantig) sein muss, und diese nennt man die Endecke, durch welche die ungleiche Axe *c* geht. Die beiden Seitenecken müssen daher 2 und 2kantig sein, diese Ecken werden durch die gleichen Axen *a* verbunden, und sind unter sich gleich. Es folgt daraus von selbst, dafs die Flächen des Deduktionshexaides, durch welche die Seitenecken abgestumpft werden, unter sich gleich sind. Sie bilden eine *rechtwinkliche vierseitige Säule*, weil sie den

Diagonalen des quadratischen Basalschnittes parallel gehen. Die dritte Hexaidfläche, Gradendfläche der Säule, stumpft die nur ein Mal erscheinende gleichkantige Endecke ab, mufs daher von den Seitenflächen verschieden sein. Von den Dodekaidflächen sind vier unter sich gleich, sie stumpfen die vier gleichen Endkanten ab und bilden ein zweites viergliedriges Oktaeder, das *erstere stumpfere Oktaeder* genannt, insofern die Endkanten desselben stumpfer sind, als die vier Endkanten des Hauptkörpers. Die beiden andern stumpfen die Seitenkanten des Oktaeders ab, und bilden eine andere *vierseitige Säule*, die mit der vierseitigen des Hexaeders eine achtseitige bildet. Denkt man sich das Dodekaid (die zweite vierseitige Säule mit dem ersten stumpfern Oktaeder verbunden) von den andern Flächen getrennt, so bekommt man einen 4+8kantigen Körper, nemlich die vier Endkanten des ersten stumpfern Oktaeders, und die 8 Kanten der Säulen- mit den Oktaederflächen, an deren Bildung also 2 ungleiche Flächen (Säulen- oder Oktaederflächen) Theil haben.

Zusatz. Der Name *viergliedrig* folgt aus der Darstellung von selbst. Wenn nemlich die Systeme nach Gliedern benannt werden, so hat man eine Stellung des Hauptoktaeders besonders im Auge. Das viergliedrige Oktaeder darf man offenbar nur nach der gleichkantigen Ecke aufrecht stellen, weil sie allein die sich streng von den Seitenecken unterscheidende ist. Wollte man das Oktaeder nach den Seitenecken aufrecht stellen, so würde keine der beiden Seitenecken von der andern unterschieden sein, man hätte daher eine zweideutige Stellung der eindeutigen vorgezogen. Bei dem regulären Oktaeder war keine Stellung ausgezeichnet, daher hiefs dasselbe gleichgliedrig; hierbei aber ist eine ausgezeichnet, und wenn wir auf diese schauen, so tritt die Zahl 4 in den Kanten und Flächen hervor, ob freilich neben der Zahl 4 in der Säulenzone die Zahl 2 bestehen mufs.

§. 30.

Das zweigliedrige Oktaeder hat ein gleichwinklich ungleichflächiges Hexaid und ein 2+2+2flächiges Dodekaid zu Deduktionskörpern.

Als Oktaeder mit drei verschiedenen basischen Rhomben (333, §. 16.) müssen alle drei Oktaederecken 2 und 2 kantig und von einander verschieden sein, das Deduktionshexaid ist daher nothwendig dreierlei flächig, es tritt eine unabhängig von der andern auf. Das Dodekaid zerlegt sich in drei Paare (2+2+2, kurz zweiundzweiflächig), von denen jedes Paar, entsprechend den Oktaederkanten, durchaus physikalisch gleich erscheint. Je zwei dieser Paare liegen sich in einer Ecke gegenüber, und bilden ein Oblongoktaeder (§. 23. 2), das daher nicht mit den Oktaiden der Systeme in eine Linie gestellt werden darf. Das Dodekaid für sich muss 4+4+4kantig sein, da je zwei Paare ein Oblongoktaeder mit gleichen Endkanten bilden müssen. Dehnt sich irgend ein Paar aus, so gibt das eine geschobene vierseitige Säule, die im zweigliedrigen Systeme häufig vorkommt.

Zusatz 1. Der Name zweigliedrig (oder vollständiger zweiundzweigliedrig) ergibt sich auch hier aus der Darstellung. Da alle drei Axen ungleich sind, so ist keine vor der andern ausgezeichnet. Nehmen wir irgend eine zur Hauptaxe, so lagern sich um ihre Ecken 2+2 Kanten, deren Dodekaidflächen also auch zu 2+2 auftreten. Diesen Zweien ordnet sich alles unter, mögen daher auch die 4 gleichen Oktaidflächen zu gleicher Zeit um dieselbe Ecke gelagert sein, so verschwinden sie gegen die Ueberzahl der 2+2.

Zusatz 2. Die rechtwinklich axigen Systeme sind mit dem zweigliedrigen Oktaeder geschlossen. Das gegenseitige Verhalten der Deduktionskörper (Hexaid und Dodekaid) gegen einander ist besonders zu beachten; eine Fläche im Hexaid entspricht genau zwei Flächen im Dodekaid;

wird eine im Hexaid ungleich, so müssen im Dodekaide stets zwei ungleich werden. Im regulären Systeme alle drei Hexaidflächen gleich, im Dodekaid alle drei Paare gleich; im viergliedrigen 2 Hexaidflächen gleich von der dritten verschieden, und dagegen zwei Dodekaidpaare gleich (erstes stumpfere Oktaeder) vom dritten Paare (erste rechtwinkliche Säule) verschieden; im zweigliedrigen alle drei Hexaidflächen ungleich, im Dodekaide drei unter einander verschiedene Paare.

Zusatz 3. Dafs je zwei Dodekaidpaare ein Oblongoktaeder bilden, sieht man leicht aus der Projektion. Man darf nur ein zweigliedriges Oktaeder auf die Axenebene *ab* projiciren, durch *ac* und *a'c* mit *b* parallel zwei Flächen, und durch *bc* und *b'c* mit *a* parallel zwei Flächen legen, so bilden ihre vier Sektionslinien ein Rechteck.

§. 31.

Das dreigliedrige Oktaeder hat ein gleichflächiges Hexaid (Rhomboeder) und ein dreiunddreiflächiges Dodekaid zu Deduktionskörpern.

Die 3 Ecken des dreigliedrigen Oktaeders sind 2 und 2 kantig (222. §. 17.), aber nicht zwei gegenüberstehende (wie beim 2 und 2gliedrigen Oktaeder), sondern 2 anliegende sind sich gleich, daher mufs das Deduktionshexaid, das sich gegen diese gleichen Ecken doch gleich verhält, auch gleichflächig werden. Die drei Säulen des Hexaides sind schiefwinklich, aber alle drei unter sich gleich, *Rhomboeder* heifst ein solcher Körper. Eine Ecke des Rhomboeders ist gleichkantig, die übrigen drei 2 und 1kantig; jene heifst die Endecke, diese die Seitenecken, weil man gewohnt ist, das Oktaeder auf seine ungleiche Fläche zu legen, wodurch die gleichkantige Ecke des Hexaides aufrecht wird. Auch die drei gleichen Flächen des Oktaeders bilden ein Rhomboeder, dessen gleichkantige Ecke ebenfalls aufrecht, wie die des Hexaides, steht. Die drei Kanten dieses letztern Rhomboeders sind durch die versteckten Kanten

des Oktaeders entstanden. Das Dodekaid mufs sich in 3+3 Flächen zerlegen. Die ersten drei stumpfen die drei gleichen den ungleichen Oktaederflächen anliegenden Kanten ab; es mufs daher ebenfalls ein gleichflächiges Hexaid, d. h. Rhomboeder, geben. Da das Dodekaid eine sechsseitige Säule mit einer dreiflächigen Endigung bildet, so müssen die andern drei Flächen in einer sechsseitigen Säule liegen. Diese Säule ist aber gleichflächig, weil sie sich zu den drei gleichen Kanten des Oktaides gleichmäfsig verhält. Folglich bildet das dreigliedrige Dodekaeder eine reguläre sechsseitige Säule mit einer rhomboedrischen Endigung. Der Name dreigliedriges Oktaeder folgt aus der Gruppirung der Kanten und Flächen nach drei.

Zusatz 1. Wir müssen besonders auf den Umstand die Aufmerksamkeit lenken, dafs aus der Gleichheit dreier Flächen auch die Gleichheit dreier Winkel folgt. So mufs das Rhomboeder des dreigliedrigen Oktaeders drei gleiche Endkanten haben, ebenso das Deduktionshexaid, und das Rhomboeder des Dodekaides; die Gleichheit erstreckt sich selbst auf die Säule. Der tiefere Grund dieser Gleichheit kann natürlich erst im rechnenden Theile aufgewiesen werden, dessen die Systematik gar nicht bedarf.

Zusatz 2. Wie das Hexaid gleichflächig, 2 und 1flächig, und 1 und 1flächig durch die fernere Unterabtheilung der Axenlängen wurde, so könnte man auch das Rhomboeder (besser Rhomboid) gleichflächig, 2 und 1flächig und 1 und 1flächig werden lassen wollen; es würde diefs dem gleichaxigen, 2 und 1axigen und 1 und 1axigen Oktaid entsprechen, wo aber alle Neigungswinkel der Axen unter sich ungleich bleiben müfsten. In der Natur kommen die-dieselben nicht vor, daher betrachten wir sie nicht.

§. 32.

Das zweiundeingliedrige Oktaeder hat ein ungleichflächiges Hexaid mit zwei rechtwinklichen Säulen, und ein

Dodekaid mit zwei gleichflächigen Flächenpaaren und einem ungleichflächigen zu Deduktionskörpern.

Da schon im 2 und 2gliedrigen Oktaeder alle Ecken ungleich waren, so mufs es im 2 und 1gliedrigen noch um so mehr der Fall sein. Das Hexaid, welches die ungleichen Ecken abstumpft, ist daher nothwendig ungleichflächig. Allein da eine Axe gegen die andere sich etwas, wenn auch gewöhnlich nur wenig, neigt, so folgt daraus, dafs auch eine der rechtwinklichen Säulen des Hexaides aus dem 2 und 2gliedrigen Systeme schiefwinklich wird. In den 3 Systemen mit rechtwinklichen Axen waren die drei basischen Schnitte gleichseitige Parallelogramme, also alle sich in einer Ecke gegenüberliegenden Kanten gleich, daher mufsten im Dodekaide nothwendig auch die diesen gleichen Kanten entsprechenden Paare noch unter sich gleich sein. Hier wird sogar nun eines der drei Paare in sich ungleich, und zwar dasjenige, welches die Kanten des rhomboidalen Schnittes abstumpft. Dieses Paar bildet daher eine ungleichflächige geschobene Säule, während die andern beiden Säulen noch gleichflächig sind. Das Dodekaid des 2 und 1gliedrigen Systems ist daher 2+2+1+1flächig. Der Name 2 und 1gliedrig ergibt sich auch hier leicht. Da alle drei Axen des Oktaides ungleich sind, so ist durch die Axenlängen keine Stellung ausgezeichnet; allein wenn eine Axe (z. B. a gegen c) gegen die zweite schief steht, so pflegt man den Krystall nach a oder nach c aufrecht zu stellen. Jede der beiden in diesen Axen liegenden Ekken (z. B. c) ist 2+1+1kantig, weil der Schnitt durch $bcbc$ noch ein Rhombus, nur der $cac'a'$ ein Rhomboid ist; ein Dodekaidpaar bildet dann eine geschobene vierseitige Säule, an deren Ende die vier übrigen Dodekaidflächen 2+1+1flächig erscheinen. Die sämmtlichen Glieder der aufrechten Ecke c sind nach den Zahlen 2 und 1 gruppirt.

§. 33.

Das eingliedrige Oktaeder hat ein ungleichflächiges ungleichwinkliches Hexaid und ein Dodekaid mit lauter ungleichen Flächen zu Deduktionskörpern.

Das Hexaid mufs auch hier nicht blos ungleichflächig, sondern auch ungleichwinklich sein, nur dafs im besondern Falle ein ebener oder ein Kantenwinkel ein rechter werden kann, nie beide zugleich, wie wir das oben (pag 130) an der körperlichen Ecke bewiesen haben. Da das einflächige Oktaid im günstigen Falle noch einen Rhombus zum basischen Schnitte haben kann (§. 24.), so könnte man verführt werden zu glauben, dafs das die gleichlangen Kanten des Rhomboidalschnittes abstumpfende Dodekaidpaar noch gleichflächig bleiben müfste. Allein einmal sind diese gleichlangen Kanten darum noch nicht gleichwinklich, und gesetzt selbst, es wäre möglich, dafs die Kanten gleichwinklich werden könnten, so wären sie dennoch nicht krystallographisch gleich, weil in jeder Kante des eingliedrigen Oktaeders zwei verschiedene Flächen sich schneiden müssen, da alle 4 Krystallräume physikalisch different sind. Die einzelnen Flächen des muthmafslich gleichen Dodekaidpaares würden daher zu ihren Seiten nicht jede von denselben Flächen begränzt werden, folglich können die Dodekaidflächen selbst auch nicht gleich sein. Es ist hier ein ähnlicher Widerspruch, wie oben (pag. 131) zwischen den di- und triklinometrischen Axen nachgewiesen wurde. Wie man dort zwar sich einbilden konnte, dafs in einer körperlichen Ecke eine Seite und ein Winkel zugleich rechtwinklich werden könnten, bei näherer Beleuchtung aber die mathematische Unmöglichkeit bewiesen wurde, so sieht man auch hier ein, dafs das gedachte Dodekaid mit einem gleichen Paare von Krystallräumen krystallographisch unmöglich ist. Ist das Oktaid ungleichräumig, so treten alle Krystallräume nur vereinzelt auf, die aus dem Oktaide deducirt werden.

Zusatz. Im Grunde genommen kann man, abgesehen von der obigen Betrachtung, dasselbe aus dem Dodekaid allein ableiten. Denken wir uns das Dodekaid des *regulären Systemes* mit den 6 gleichen Krystallräumen *aaaaaa*, so findet sich, dafs jeder Krystallraum (oder, was dasselbe ist, jede Fläche) von den übrigen 5 auf gleiche Weise geschnitten wird; nehmen wir nun immer auf die sich zunächst um eine Fläche lagernden 4 Flächen Rücksicht, so wird jede Fläche von den vier anliegenden physikalisch gleich beschaffenen Flächen unter 120° geschnitten. Im *viergliedrigen Dodekaide* ist ein Paar different, wir haben also *aaaabb*; jede der vier gleichen Flächen *a* wird von den vier Flächen *aabb*, hingegen jede der *b* von den vier Flächen *aaaa* begränzt und unter denselben Kanten geschnitten; folglich sind die 4*a* und die 2*b*, jede Gruppe unter sich, physikalisch gleich beschaffen. Ja man kann sagen, 4+2 Krystallräume können im Dodekaide unmöglich anders gruppirt werden, als sie im viergliedrigen Systeme gruppirt sind. Dasselbe gilt auch im *dreigliedrigen Systeme*, wo wir 3*a*+3*b* haben; jede *a* wird von 2*a* und 2*b* begränzt, ebenso jede *b* von 2*a* und 2*b*; jede Fläche wird also von gleichen Flächen begränzt, und hiernach würden sie gleich sein. Allein einmal ist die Ordnung der anliegenden Flächen in beiden Gruppen verschieden, dann aber noch die den Flächen anliegenden Kantenwinkel. Die Gruppirung zu 3+3 ist nur in einer Weise möglich, im Dodekaide des dreigliedrigen Systemes. Im *zweigliedrigen Systeme* haben wir 3 Paare, nemlich: *aabbcc*, sie können nur so zerlegt werden, dafs jedem Basalschnitte ein Paar gehört, dann wird jedes Paar von den Flächen der beiden andern Paare respektive unter gleichen Kantenwinkeln geschnitten. Im *zweiundeingliedrigen Systeme* wird eines der Paare different, also *aa'bbcc*, das ungleichflächige Paar (*aa'*) liegt am Rhomboidalschnitte des 2 und 1gliedrigen Oktaeders. Projiciren wir die gleichen Paare auf den

Rhomboidalschnitt des eingeschriebenen Oktaeders, so bilden sie ein Oktaid mit 2 Rhomben und einem Rhomboid (334) in den Basalschnitten, folglich sind die in dem Rhomboidalschnitte liegenden Ecken verschieden kantig; da nun das ungleiche dritte Paar diese Ecken abstumpfen mufs, so mufs es aus physikalisch differenten Flächen bestehen. Daraus folgt dann schon weiter, dafs wenn auch die Flächen des ungleichflächigen Paares (*aa'*) beide dieselben Gränzflächen (*bbcc*) zeigen, sie doch unter verschiedenen Kantenwinkeln geschnitten werden müssen. Wollten wir nun zwei Paare different werden lassen, also: *aa'bb'cc*, wie im *diklinometrischen Systeme* angenommen wird, so findet sich zwar, dafs die Gränzflächen des gleichen Paares (*cc*) dieselben (*aa'bb'*) sind; allein die eine Fläche (*c*) des Paares mufs unter jeder Bedingung unter andern Kantenwinkeln geschnitten werden, als die andere, daher ist ein solcher Fall unmöglich. Es müssen also alle different werden (*aa'bb'cc'*).

Bemerkenswerth ist es, dafs man die 2+2+1+1flächigen Dodekaide noch auf eine andere Weise gruppiren kann, als es im 2 und 1gliedrigen Systeme geschah. Denken wir uns nemlich das eine gleichflächige Paar der Kante eines Basalschnittes anliegend, das andere der andern Kante desselben Basalschnittes, so mufs das dritte Paar different werden, während die beiden ersten Paare vermöge ihrer symmetrischen Lage gleichflächig sind. Ein solches Dodekaid ist aber der Deduktionskörper des 2+1+1flächigen Oktaides, welches wir oben (pag. 162) von der Systematik ausgeschlossen haben, weil das Oktaid ein Deduktionskörper des 2+1gliedrigen Systemes ist. Daraus folgt, dafs auch dieses Dodekaid kein neues System bedingen kann, sondern sammt seinem eingeschriebenen 2+1+1flächigen Oktaide dem 2+1gliedrigen Systeme unterzuordnen ist. Aus denselben Gründen wurde auch das Oblongoktaeder (pag. 162) von der Systematik ausgeschlossen und dem

zweigliedrigen Systeme untergeordnet. Würde man sich aus diesem 4+1+1kantigen Oblongoktaeder ein Dodekaid deduciren, so würde dieses ebenfalls 4+1+1flächig, und in der That läfst auch die Symmetrie ein solches Dodekaid zu, doch fällt diefs sammt seinem Oktaide dem zweigliedrigen Systeme anheim.

Um nun alle Möglichkeiten zu erschöpfen, dürfen wir nur auf den Satz des Oktaides (§. 18.) zurückgehen, woraus sich etwa folgern liefse, dafs noch 3+2+1 und 3+1+1+1flächige Dodekaide vorhanden sein möchten. Aber man versuche nur an einem Granatoeder eine solche Flächengleichsetzung, und man wird finden, dafs die Symmetrie solche Fälle ausschliefst.

Wie die Oktaide, so zeigen also auch die Dodekaide auf 6 Systeme hin. Wenn man daher von einem sogenannten *siebenten Krystallsysteme* spricht, so hat man dabei die Symmetrieverhältnisse ganz übersehen und nur die mathematischen im Auge gehabt. Ja sogar diese sprechen theilweis dagegen. Denn man legt diesem siebenten System (diklonometrischen) nicht etwa einen rechten Winkel der *Axenlinien,* sondern der *Axenebenen* unter. Nun läfst sich aber leicht durch Rechnung beweisen, dafs diese rechtwinkliche Axenebene gar keinen wesentlichen Einflufs auf die Gleichheit und Ungleichheit der Oktaidkanten ausüben können. Denn wenn bei den rechtwinklichen Axenlinien wenigstens zwei Oktaidkanten noch gleich lang (darum noch nicht gleich) sein mufsten, so fällt bei den rechtwinklichen Axenebenen selbst diese einseitige Gleichheit noch hinweg.

Hiermit sind die wesentlichen Principe der Systematik entwickelt. Wir kommen nun an die specielle Auseinandersetzung der Systeme, wobei wir nur im Allgemeinen dieselben Grundsätze wiederholt anzuwenden haben, damit der Flächenreichthum eines Systems sich entfalte.

Die Deduktionskörper des Reguläroktaeders $\overline{\underline{|a : a : a|}}$.

Das Reguläroktaeder erhält den Axenausdruck $\overline{\underline{|a:a:a|}}$, wo das umschriebene Oblongum (▭) anzeigt, dafs alle Axen rechtwinklich, und die gleichen Buchstaben (a), dafs sämmtliche Axen gleich lang sind. Da dieses Oktaeder 6 gleich geschobene vierseitige Säulen hat (wie aus den gleichen Oktaederkanten folgt), so müssen sich die möglichen regulären Körper aus einer der vierseitigen Säulen ersehen lassen.

Habe ich eine beliebige Kante durch zwei Flächen (a und b Tab. IV. Fig. 20—23.) gebildet, so können entweder eine Fläche oder zwei Flächen zur Kante hinzutreten. Tritt eine hinzu, so kann diese mit den beiden vorhandenen in einer Zone liegen, oder nicht; liegt sie in einer Zone, so stumpft sie die Kante ab (Fig. 20.); fällt sie nicht mit ihnen in eine Zone, so *schärft sie die Säule zu* (Fig. 21.), d. h. sie bildet an einem Ende der Säule mit den Flächen a und b divergirende Kanten. Treten zwei Flächen zur Kante hinzu, so können sie mit der Kante in einer Zone liegen, d. h. *die Kanten zuschärfen* (Fig. 22.), oder nicht in einer Zone liegen, dann werden sie am obern oder untern Ende der Säule als zwei Flächen erscheinen, die mit den a und b divergirende Kanten bilden (Fig. 23.).

Wenn wir diesen Satz auf das reguläre Oktaeder übertragen, so müssen wir immer bedenken, dafs dasselbe aus 6 vierseitigen Säulen besteht, die unter einander gleich sich gegenseitig durchdrungen haben. Jede vierseitige Säule hat aber eine stumpfe und eine scharfe Kante. Sowohl mit der stumpfen als auch mit der scharfen Kante können jene vier Arten von Veränderungen vorgehen. Es werden nun aber die Ersatzflächen der stumpfen und der scharfen Kan-

ten an allen 6 Säulen unter sich gleich sein müssen. Denke ich mir daher die gleichen Flächen zu Körpern gruppirt, so sind im Allgemeinen 2 4 = 8 verschiedene Deduktionskörper möglich (nemlich an der stumpfen Kante 4 und an der scharfen Kante 4). Um nun zu sehen, wie die neuen Körper die Axen des Oktaeders schneiden werden, müssen wir uns nur immer eine Säule am Axenkreuze des Oktaeders ausgedehnt denken, was dann für eine Säule gilt, gilt respektive für alle.

1. *Die Fläche stumpft die scharfe Säulenkante ab.* Es entstände dadurch an jeder Oktaedersäule ein Krystallraum, folglich ginge daraus ein Körper mit 6 Krystallräumen hervor. Allein je zwei scharfe Kanten (versteckte Kanten des Oktaeders pag. 33) liegen quer über den Ecken des Oktaeders, je zweien Axen respektive parallel. Daher mufs ein Krystallraum zugleich zwei scharfe Säulenkanten abstumpfen. Folglich ist der Körper der Würfel mit drei Krystallräumen

$$\overline{|a : \infty a : \infty a|}.$$

Es folgt diefs aus dem früher gelehrten unmittelbar, man darf nur ein Oktaeder zur Hand nehmen und das Deduktionshexaid sich hinzudenken. Siehe Tab. V. Fig. 1. und Fig. 2., wo die Lage der Oktaidaxen der Lage der Hexaidkanten genau entspricht.

2. *Die Fläche stumpft die stumpfe Kante ab.* Diefs gibt einen Körper mit 6 Krystallräumen, weil hier der Krystallraum nie zwei Kanten zugleich abstumpfen kann. Es ist diefs das Granatoeder, welches als Deduktionskörper das Zeichen

$$\overline{|a : a : \infty a|}$$

bekommt (Tab. V. Fig. 3.).

3. *Zwei Flächen schärfen die scharfe Säulenkante zu.* Denken wir uns zwei anliegende Oktaederflächen sich ausdehnen (Tab. V. Fig. 1 die $\underline{|a : b : c|}$ und $\underline{|a' : b' : c|}$), so

geht die scharfe Säulenkante durch den Eckpunkt (c) der Seitenkante ($\overline{\underline{|a:b|}}$) des Oktaeders parallel. Wird diese Kante zugeschärft, so liegt die Zuschärfungsfläche in der Oktaederkante ($\overline{\underline{|a:b|}}$), d. h. die Zuschärfungsfläche parallel mit sich bewegt, fällt in diese Seitenkante, erhält also den Ausdruck $a:a$ (eigentlich $a:b$ nach Fig. 1. Tab. V., wir haben aber hier nur zur Unterscheidung abc gesetzt, unter welchen Buchstaben wir jedoch immer, so lange wir im regulären Systeme sind, aaa denken). Die dritte Axe (c) wird kleiner geschnitten, als die Einheit, weil die Fläche in c die Kante zuschärft; daher hat die Fläche hier das Zeichen $\frac{1}{n}a$ (in Fig. 1 $\frac{1}{n}c$), wo n eine ganze Zahl bedeutet. So dafs der Ausdruck unserer Fläche

$$\overline{\underline{\left| a:a:\frac{1}{n}a \right|}}$$

ist. Der Körper mufs 2.6=12 Krystallräume enthalten, da an jeder Säule sich 2 befinden. Lassen wir diese Zuschärfungsflächen ins Oktaeder eindringen, so entsteht an jeder Ecke ein neues Oktaeder durch die Zuschärfung der zwei scharfen Säulenkanten. Der Körper besteht also aus drei Oktaedern, die sich druchdringen, wie diefs Fig. 4 an den drei Axenecken zu sehen, wo um jede Ecke sich vier Flächen lagern. Der Körper heifst:

Leucitoid (Leucitoeder = $\overline{\underline{|a:a:\tfrac{1}{2}a|}}$ ist ein besonderes Leucitoid, das beim Leucit häufig vorkommt). Verbindet man die Endpunkte der Axen, so entsteht ein eingeschriebenes Oktaeder, über welchen sich die Flächen zu drei gruppiren (der Anfänger darf sich nur immer die Axen abc der Figur 1 parallel mit sich in die folgenden Körper hineinbewegen, um die Lage der Axen in allen folgenden Körpern zu erhalten), indem sie sich von den Ecken der Oktaederflächen aus zu drei flächigen Pyramiden er-

heben. Nach dem Symmetriegesetz sind nun alle Kanten, welche sich über den eingeschriebenen Oktaederkanten erheben (*o,o*), unter sich gleich, sie heifsen daher *gebrochene Oktaederkanten*, durch sie sind die Umrisse des eingeschriebenen Oktaeders hervorgehoben. Die quer dagegen liegenden Kanten (*h,h*) sind die *gebrochenen Würfelkanten;* denn würde man sich ihre beiden äufsern Endpunkte verbunden denken, so würde eine Linie entstehen, die der Axe (*b...b'*) parallel ginge. Daher sind durch diese Kanten die Umrisse des eingeschriebenen Würfels hervorgehoben. Durch eine leichte Rechnung ergibt sich nun weiter, dafs das Leucitoid 2.12 = 24 *gebrochene Oktaeder*- und 2.12 = 24 *gebrochene Würfelkanten*, Summa 48 Kanten haben müsse. Diese Kanten versammeln sich zu 6 oktaedrischen Ecken, die in den Endpunkten der Axen zusammenlaufen, und von je vier gebrochenen Oktaederkanten eingeschlossen sind; zu 8 hexaedrischen Ecken, die sich über den eingeschriebenen Oktaederflächen erheben, und aus je drei gebrochenen Würfelkanten gebildet werden; endlich zu 12 zweiundzweikantigen Ecken (*o,o,h,h*), die sich in der Mitte sowohl der gebrochenen Würfel- als auch Oktaederkanten finden. Die Würfelkanten (gebrochenen) verbinden also die 3- mit den 2+2kantigen Ecken; die Oktaederkanten (gebrochenen) die 4- mit den 2+2kantigen Ecken. Würde man die vier- mit den dreikantigen Ecken verbinden, so würde eine Diagonale in der Trapezoidfläche des Leucitoides entstehen, welche jede Fläche symmetrisch halbirte. Diese Diagonalen (24 an der Zahl, weil soviel Grenzflächen) würden die Kanten eines eingeschriebenen Dodekaides bilden (ob ein wahrhaftes im rechnenden Theile), so dafs man in das Leucitoid ein Hexaid, Oktaid und Dodekaid einschreiben kann (in das Leucitoeder = $\overline{|a : a : \frac{1}{2}a|}$ folglich Oktaeder, Hexaeder und Granatoeder).

4. *Zwei Flächen schärfen die stumpfe Kante zu.* Es leuchtet auch hier sogleich ein, dafs die Fläche den Aus-

druck $a:a$ haben mufs. Denken wir uns eine Säule (z. B. die Flächen $\overline{|c : a : b|}$ und $\overline{|c' : a : b|}$), so müssen die Zuschärfungsflächen in der Säulenzone liegen (also in Kante ab), die dritte Axe (c) wird aber unter einem gröfsern Verhältniss geschnitten, also na (nc), wo n eine ganze oder gebrochene Zahl aber grösser als 1 bedeutet. Der dadurch entstehende Körper hat ebenfalls $2.6=12$ Krystallräume mit dem Ausdruck

$$\overline{|a : a : na|}.$$

Denken wir uns diese Zuschärfungsflächen sich ausdehnen, so entsteht ein

Pyramidenoktaeder. Die 12 Oktaederkanten (o Fig. 5.) sind darin unverändert geblieben, aber über den Flächen des eingeschriebenen Oktaeders erheben sich drei neue Kanten (π), Pyramidenkanten genannt. Sie geben dem Körper die Umrisse eines Granatoeders, daher kann man sie auch Granatoederkanten nennen. Die Anzahl der Kanten ist $3.8+12=36$. Wie beim Granatoeder, so haben wir auch hier zweierlei Ecken: $4+4$kantige in den Endpunkten der Axen und 3kantige über den Oktaederflächen. Die Oktaederflächen bilden die Basen, die Pyramidenkanten die Schenkel der gleichschenklichen Gränzdreiecke.

5. *Die hinzutretende Fläche bildet an der stumpfen Säulenkante divergirende Kanten* (sie schärft die Säule zu). Eine solche Zuschärfungsfläche ist auf die stumpfe Kante der Säule unter gleichen Winkeln aufgesetzt. Es findet sich natürlich der Symmetrie wegen sowohl auf der hintern als vordern stumpfen Säulenkante eine solche Fläche, so dafs jeder Säule zwei Krystallräume angehören; daher erhalsen wir $2\ 6=12$ Krystallräume. Wenn sich nun zwei Flächen (z. B. an der Säule $a:c:b'$ mit $a:c:b$, nach c hin und nach a hin aufgesetzt) treffen, so werden sie eine Kante bilden, die quer gegen eine Oktaederkante ($\overline{|a : c|}$) steht, also mit der Oktaederaxe parallel geht (mit

$b \ldots b'$, weil wir uns immer Deduktionsflächen denken, wie sie auf Tab. I. entwickelt sind). Daher müssen die Flächen das Zeichen ∞a (∞b) enthalten, die beiden andern Axen aber in der Ungleichheit schneiden, also in $\frac{1}{n} a : a$. Das Flächenzeichen wird

$$\boxed{a : \frac{1}{n} a : \infty a},$$

wo n eine ganze oder gebrochene Zahl bedeutet. Durch diese Würfelkanten (Tab. V. Fig. 6.) mufs daher der Umrifs des Hexaeders in der entstehenden Figur hervorgehoben sein, dader auch der Name

Pyramidenwürfel, mit 12 Würfelkanten (h), und $4 \cdot 6 = 24$ Pyramidenkanten (π). Die Ecken sind auch hier, wie im Pyramidenoktaeder zweierlei: 12 vierkantige Ecken über den eingeschriebenen Würfelflächen von den Pyramidenkanten (π) gebildet, und 8 Würfelecken (im Allgemeinen $3 + 3$kantig) mit den Ecken des eingeschriebenen Würfels zusammenfallend. Die Gränzflächen sind gleichschenkliche Dreiecke, deren Basis h und deren gleiche Schenkel π sind. Die gegenüberstehenden vierkantigen werden durch die Axen verbunden, welche den Würfelkanten h parallel gehen. Jede Fläche liegt in einer Würfelkante, d. h. sie geht ihr parallel, während sie in ihrer Bewegung die beiden übrigen in der Ungleichheit schneiden würde.

Anmerkung. Bilden die hinzutretenden Flächen an der scharfen Säulenkante divergirende Kanten, so treten die Flächen in den Ecken des Oktaeders (an den versteckten Kanten) auf, sie schärfen daher die Ecken des Oktaeders so zu, dafs die Zuschärfungsflächen auf die Oktaederflächen aufgesetzt sind, ein solcher Körper wird aber ein Leucitoid, daher fällt diefs mit Fall 3 zusammen.

6. *Treten an der stumpfen oder scharfen Säulenkante zwei Flächen mit divergirenden Kanten auf, so erhalten wir* $4 \cdot 6 = 24$ *Krystallräume, die gröfstmögliche Flächen-*

zahl. Es ist diefs der allgemeinste Fall, durch welche Flächen die Oktaederaxen alle in der Ungleicheit geschnitten werden, daher der allgemeine Ausdruck $\overline{\left| a : \frac{1}{m} a : \frac{1}{n} a \right|}$.

Dadurch entstehen auf jeder eingeschriebenen Oktaederfläche 6 Flächen, dieses gibt 6.8 = 48, also den

Achtundvierzigflächner, Fig. 7. Die Gränzflächen des Körpers sind ungleichseitige Dreiecke, deshalb die dreierlei Kanten: gebrochene Oktaederkanten (o,o) 2.12 = 24; gebrochene Würfelkanten (h,h) 2.12 = 24; Granatoederkanten (g,g) 24, Summa 72. Die Ecken sind auch dreierlei: 4+4kantige Oktaederecken, 3+3kantige Würfelecken und 2+2kantige mittlere Ecken; Ecken, die schon bei den vorigen Körpern erwähnt sind, und deren Symmetrie überaus deutlich hervortritt. Die Umrisse des Granatoeders werden bei $\overline{|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|}$ besonders sichtbar, ja man kann diesen 48flächner wirklich ein Granatoeder einschreiben, wie aus Tab. I. sichtbar ist; daher nennt man dieses auch *Pyramidengranatoeder,* indem sich über jeder Fläche des eingeschriebenen Granatoeders eine vierseitige Pyramide erhebt.

Der 48flächner hat das allgemeinste Zeichen

$$\overline{\left| a : \frac{1}{m} a : \frac{1}{n} a \right|},$$

aus ihm gehen die Zeichen aller regulären Körper hervor, sobald man den einzelnen Buchstaben besondere Werthe gibt.

1) Setzen wir zunächst $m = n$, so wird der allgemeine Ausdruck

$$\overline{\left| a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n} a \right|} = \overline{| na : a : a |}.$$

Denken wir unter n eine ganze Zahl und gröfser als 1, so ist dieses das Zeichen des Pyramidenoktaeders. Um dieses näher einzusehen, wollen wir uns den 48flächner

Fig. 7. mit dem Zeichen $|a : 2a : 3a|$ denken. Die Flächen im obern rechten Oktanten (abc) schneiden dann folgendermaſsen ihre Axen: von den beiden obern Flächen (an Axe c liegend) schneidet die linke (ogh) die Axe c in der Einheit, die ihr am fernsten liegende b im Dreifachen und die ihr näher liegende a im Doppelten. Diese Regel gilt für alle Flächen, in der 4 und 4kantigen Ecke haben sie ihre kleinste Axe, über die 3 und 3kantigen Ecke hinaus ihre gröſste, über die 2 und 2kantige ihre mittlere. Es folgt dieses aus der Projektion unmittelbar. Suchen wir nach dieser Regel die Axenlängen von der untern ogh, welche in a ihr kleinstes Zeichen hat, so hat sie über die 2 + 2kantige Ecke hinweg in c ihre zweifache, und über die 3 und 3kantige Ecke hinweg in b ihre dreifache Axe. Daraus folgt dann weiter, daſs die gebrochene Oktaederkante $o = |a : 2a|$ wird, weil die Flächen, die in ihr liegen, in der Richtung dieser Kante dasselbe Zeichen haben. Denken wir uns nun weiter im Zeichen $|a : 2a : 3a|$, daſs die beiden ersten a gleich werden, also $|a : a : 3a|$ hervorgeht, so wird jetzt die gebrochene Oktaederkante wegfallen müssen, weil sie nicht mehr $|a : 2a|$, sondern $|a : a|$ ist, d. h. sowohl die untern als obern o von einem Axenpunkte (c) zum andern (a) geht. Daraus folgt dann weiter, daſs die gebrochene Würfelkante h ebenfalls herausfällt, folglich nur die Oktaeder- und Granatoederkanten bleiben, wie im Pyramidenoktaeder (Fig. 5.) der Fall ist. Der 48flächner ist also ein *gebrochenes Pyramidenoktaeder*.

Denken wir uns im obigen Zeichen $|na : a : a|$ unter n eine Zahl kleiner als 1, so kann man das Zeichen $\left|a : a : \frac{1}{n} a\right|$ schreiben, worin n eine ganze Zahl und gröſser als 1. Aus

dem allgemeinen Zeichen $\left| a : \frac{1}{m} a : \frac{1}{n} a \right|$ geht es auch so hervor, dafs ich $m = 1$ setze. Es ist jetzt das Zeichen des Leucitoides geworden. Um dieses näher einzusehen, gehen wir auf obiges Zahlenbeispiel $|a : 2a : 3a|$ zurück, und lassen darin die hintern beiden Axengröfsen gleich werden, dann formt es sich z. B. in $|a : 2a : 2a| = |\tfrac{1}{2} a : a : a|$ um. Tragen wir dieses auf die Figur über, so soll also die obere *ogh* (an *c* anliegend) von ihrem *a* (*c*) aus sowohl über die 2+2kantige Ecke als auch über die 3+3kantige Ecke hinaus nach 2*a* gehen, dasselbe mufs auch mit der zweiten in *g* ihr anliegenden Fläche der Fall sein, daher müssen beide in der obern Axe (*c*) sich anliegende Flächen zusammenfallen. Die Granatoederkanten (*g*) fallen also heraus, und der 48flächner wird dadurch ein Leucitoid. Demnach kann man den 48flächner als ein *gebrochenes Leucitoid* ansehen.

2) Wird ferner in dem Zeichen $\left| a : \frac{1}{m} a : \frac{1}{n} a \right|$ $m = o$, so verwandelt sich dasselbe in

$$\left| a : \frac{1}{o} a : \frac{1}{n} a \right| = \left| a : \infty a : \frac{1}{n} a \right|,$$

das Zeichen des *Pyramidenwürfels*. Tragen wir diefs auf das Zeichen $|a : 2a : 3a|$ über, so ist z. B. $3 = \infty$ zu setzen, daraus geht das Zeichen $|a : 2a : \infty a|$ hervor. Auf die Figur des 48flächner übergetragen bedeutet diefs, dafs die in *c* liegende *ogh* von *a* nach 2*a* (*a* : 2*a*) gehe, allein die dritte Axe (*b*) nie erreiche, ihr also parallel liege. Dasselbe gilt von der in *o* anliegenden Fläche (*oh*), daher mufs die zwischen beiden liegende gebrochene Oktaederkante herausfallen, der 48flächner mufs zum Pyramidenwürfel werden, er ist als ein *gebrochener Pyramidenwürfel* anzusehen.

3) Wird im Zeichen $\overline{\underline{|a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a|}}$ nicht blos $m=o$, sondern auch $n=1$ gesetzt, so entsteht das Zeichen

$$\overline{\underline{|a : \frac{1}{o}a : \frac{1}{1}a|}} = \overline{\underline{|a : \infty a : a|}},$$

das Zeichen des Granatoeders. Es folgt diefs theilweis schon aus obigem. War $m=o$, so entstand der Pyramidenwürfel, die gebrochenen Oktaederkanten mufsten also herausfallen. Setzen wir nun ferner noch zu gleicher Zeit $n=1$, so werden die in einer Würfelkante anliegenden Flächen beide von a nach a gehen müssen, es fallen also auch die Würfelkanten heraus. Daher kann man den 48-flächner als ein Pyramidengranatoeder ansehen (wiewohl man bedenken mufs, dafs die Granatoederkanten g, welche die Granatoederfläche begränzen, nicht bei allen 48fläch-nern in einer Ebene liegen, es entsteht dann nur scheinbar ein Pyramidengranatoeder, wie im rechnenden Theile auseinander gesetzt werden soll).

4) Setzen wir im Zeichen $\overline{\underline{|a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a|}}$ $m=o$ und $n=o$, so entsteht

$$\overline{\underline{|a : \frac{1}{o}a : \frac{1}{o}a|}} = \overline{\underline{|a : \infty a : \infty a|}}$$

der Würfel. Wir müssen also je 8 Flächen, die den 4 Würfelkanten in den 4+4kantigen Ecken anliegen, in eine Fläche zusammenfallen lassen.

5) Sind endlich alle Axen mit gleichen Zeichen versehen, so erhalten wir das Oktaeder

$$\overline{\underline{|a : a : a|}},$$

in welchem Falle die 6 um eine 3+3kantige Ecke gelagerten Flächen zu einer zusammenfallen müssen.

Der Anfänger wird dieses alles leicht verstehen, wenn er sich einen 48flächner zu verschaffen sucht, den er sich

aus 48 kongruenten aber ungleichseitigen Dreiecken konstruirt.

Wie wir aus dem allgemeinen Zeichen des 48flächner alle übrigen Körper ableiten können, so läſst sich auf ähnliche Weise durch die unmittelbare Anschauung desselben Körpers der Umriſs aller übrigen ermitteln.

Sobald nemlich der 48flächner im Gleichgewicht ist, so muſs jede seiner Gränzflächen ein ungleichseitiges Dreieck bilden, das also drei anderen Flächen anliegt. Greifen wir aus allen irgend eine beliebige heraus, und lassen diese

1) mit der ihr in der Granatoederkante anliegenden Fläche zusammenfallen, d. h. denken wir uns den Winkel dieser Kante so stumpf werden, daſs beide Flächen nicht mehr durch eine Kante von einander getrennt (gebrochen) erscheinen: so müssen in dem entstehenden Körper die Granatoederkanten wegfallen, folglich nur gebrochene Oktaeder- und Würfelkanten bleiben. Hierdurch ergibt sich ein *Leucitoid,* dessen Umrisse wie die aller folgenden schon im 48flächner geschrieben stehen (die Kanten *o* und *h* bilden diese Umrisse).

2) Lassen wir unsere Fläche mit der in der gebrochenen Würfelkante (*h*) anliegenden Fläche zusammenfallen, so fallen die Würfelkanten heraus. Der neue Körper hat also nur Granatoeder- und Oktaederkanten, letztere sind auch nicht einmal gebrochen, weil das Gebrochensein sich nicht mit dem Zusammenfallen der Flächen verträgt. Wir erhalten also ein *Pyramidenoktaeder.*

3) Lassen wir endlich unsere Fläche mit der in der gebrochenen Oktaederkante (*o*) anliegenden Fläche zusammenfallen, so fallen die Oktaederkanten heraus, und es bleiben nur Granatoeder- und Würfelkanten, die ungebrochen sein müssen. Dadurch geht der *Pyramidenwürfel* hervor.

Da auſser obigen dreien keine anliegende Fläche mehr vorhanden ist, so kann in dieser Art auch kein symmetri-

scher Körper mehr vorkommen. Es leuchtet zugleich aus dieser Darstellung ein, dafs man den 48flächner als Pyramidengranatoeder, gebrochenen Pyramidenwürfel oder gebrochenes Pyramidenoktaeder betrachten kann.

Wollen wir weitere Körper in dieser Weise ableiten, so müssen wir die gewählte Fläche mit *nicht* anliegenden zusammenfallen lassen. Lassen wir daher die Fläche

4) *mit einer in der* 3+3*kantigen* Ecke gegenüberliegenden Fläche zusammenfallen, so liegen zwischen zwei solchen Flächen eine Granatoeder- (*g*) und eine gebrochene Würfelkante (*h*), diese müssen also in dem neu entstehenden Körper herausfallen, und letzterer kann nur noch Oktaederkanten haben, mufs also das eingeschriebene *Oktaeder* sein. Man sagt einfach: 6 Flächen um den 3 und 3kantigen Ecken fallen zusammen.

5) Lassen wir die Fläche mit der in der 2 und 2kantigen Ecke gegenüberliegenden zusammenfallen, so liegen zwischen diesen die gebrochenen Oktaeder- (*o*) und Würfelkanten (*h*), diese fallen also weg, der neue Körper hat nur noch Granatoederkanten, ist folglich das *eingeschriebene Granatoeder*. Man sagt einfach: 4 Flächen um den 2 und 2kantigen Ecken fallen zusammen.

6) Lassen wir endlich die Fläche mit einer in der 4 und 4kantigen Ecke gegenüberliegenden zusammenfallen, so liegen zwischen diesen die Granatoeder- und gebrochenen Oktaederkanten, folglich fallen diese heraus, und der Körper kann nur Würfelkanten haben, mufs folglich der eingeschriebene *Würfel* sein. Man sagt einfach: 8 Flächen um den 4 und 4kantigen Ecken fallen zusammen.

Hiermit sind alle Fälle erschöpft.

Wir können weiter dasselbe Princip auch auf die drei 24flächner anwenden.

Lassen wir im *Leucitoeder* (Fig. 4.) zwei in der gebrochenen Oktaederkante (*o*) anliegende Flächen zusammenfallen, so kann der entstehende Körper nur Würfel-

kanten haben, ist also ein *Würfel*; zwei in der gebrochenen Würfelkante (h), so kann der entstehende Körper nur Oktaederkanten haben, ist also ein *Oktaeder*. Das Granatoeder läſst sich nicht ableiten.

Lassen wir im *Pyramidenwürfel* (Fig. 6.) zwei in der Würfelkante (h) anliegende Flächen zusammenfallen, so kann der entstehende Körper nur Granatoederkanten haben, ist also ein *Granatoeder*; zwei in der Granatoederkante (π), so kann der entstehende Körper nur Würfelkanten haben, ist also ein *Würfel*. Das Oktaeder läſst sich nicht ableiten.

Lassen wir im *Pyramidenoktaeder* (Fig. 5.) zwei in der Oktaederkante anliegende Flächen zusammenfallen, so kann der entstehende Körper nur Granatoederkanten haben, ist also ein *Granatoeder*; zwei in der Granatoederkante, so kann der entstehende Körper nur Oktaederkanten haben, ist also ein *Oktaeder*. Der Würfel läſst sich nicht ableiten.

Wir sehen daher, daſs sich aus jedem 24flächner nur 2 Körper ableiten lassen, der dritte fehlt; die 2 ableitbaren nennt man die eingeschriebenen Körper.

Das Tetraeder.

Lasse ich an dem Oktaeder irgend eine Fläche sich ausdehnen, die drei anliegenden Flächen verschwinden etc., so schlieſsen die vier dadurch herrschend werdenden Flächen ein Tetraeder ein.

Um diesen Satz einzusehen, nehmen wir ein Oktaeder zur Hand, bezeichnen irgend eine Fläche mit 1, die drei ihr anliegenden mit 0; alsdann bleiben noch 4 unbezeichnete Oktaederflächen übrig, bezeichnen wir von diesen die der 1 parallellaufende mit 0 und die übrigen drei noch mit 1, so haben vier Flächen das Zeichen 1 und vier das Zeichen 0, die sich gegenseitig so verhalten, daſs jeder mit 1 bezeichneten drei mit 0 bezeichnete, und umgekehrt je-

der mit 0 bezeichneten drei mit 1 bezeichnete anliegen. Zu gleicher Zeit werden wir auch finden, dafs die 1 den 0 parallel laufen, dafs also jeder der vier Krystallräume von einem 0 und 1 begränzt ist. Lassen wir die einen (1) wachsen und die andern (0) verschwinden und umgekehrt, so bekommen wir jedes Mal ein Tetraeder (Tab. V. Fig. 8.), d. h. einen von 4 Flächen begränzten Körper, von denen keine der andern parallel geht. Da man die 4 Flächen als Reduktionsebenen betrachten kann, so leuchtet ein, dafs der neue Körper 6 Kanten haben mufs. Diese Kanten müssen aber die versteckten Kanten des Oktaeders sein, weil neben einer wachsenden Fläche die 3 anliegenden verschwinden. Die 6 Kanten des Tetraeders geben daher den Kanten des zugehörigen Oktaeders parallel. Das Tetraeder hat seine 4 Ecken, wo die verschwundenen Oktaederflächen liegen. Die Flächen des Tetraeders müssen ebenfalls Dreiecke sein, weil jede Fläche sich nur mit den 3 übrigen schneiden kann. Dafs jedes Oktaeder 2 Tetraeder enthält (Tetraeder (0) und Gegentetraeder (1)), leuchtet an sich ein. Es folgt schon daraus, dafs das Oktaeder 12 versteckte Kanten hat, und von diesen nur 6 einem Tetraeder angehören, die übrigen 6 müssen daher in einem zweiten enthalten sein. Weder Flächen noch Kanten können daher im Tetraeder einander parallel gehen.

Dafs auch jedes beliebige Oktaid ein zugehöriges Tetraid hat, darf ich nicht erwähnen, die 6 Tetraidkanten sind aber in den verschiedenen Tetraiden verschieden, sie richten sich genau nach den 6 Säulen des Oktaides, so viel von diesen unter sich gleich sind, so viel Kanten sind auch im zugehörigen Tetraide gleich. Daher hat das Tetraeder des regulären Systems 6 gleiche Kanten.

Hemiedrie.

Die vollflächigen Körper sind entweder einer geneigtflächigen oder parallelflächigen Hemiedrie fähig; zu er-

stern gehört das Leucitoid, das Pyramidenoktaeder und das Oktaeder, zu letztern der Pyramidenwürfel. Am 48-flächner kommen beide vor.

Wenn man an einem Körper die Hälfte der Flächen sich ausdehnen läfst, während die andere Hälfte verschwindet, so heifst der abgeleitete hälftflächige Körper ein *hemiedrischer* (ἡμι halb). Man darf die hemiedrische Ableitung eines Körpers nicht mit der Ableitung von pag. 188 verwechseln, wo aus einem vollflächigen Körper durch das Zusammenfallen zweier Flächen in eine einzige auch ein neuer theilflächiger Körper entstand. Dort wurden die beiden Flächen, welche zusammenfallen sollten, beweglich gedacht, und zwar so lange gedreht, bis zwischen beiden die vorhandene Kante wegfiel; es ging daher nur ein einziger Körper aus dem mehrflächigen Körper hervor. Hier bei der Hemiedrie denken wir uns alle Flächen unbeweglich fest, und die Hälfte derselben sich ausdehnen, während die andere Hälfte verschwindet. Wie das bei der Entstehung des Tetraeder aus dem Oktaeder der Fall war. Denkt man dann umgekehrt die verschwundenen Flächen sich ausdehnen, und die übrigen verschwinden, so entsteht ein ganz ähnlicher Körper, wie im ersten Fall. Daher gehen aus dem vollflächigen Körper stets 2 neue hemiedrische Körper hervor, die sich wie links und rechts gegen einander verhalten. Durchdringen sich diese beiden Hälften in ihrer ursprünglichen Stellung, so entsteht natürlich wieder der vollflächige Körper, weil 2 Hälften ein Ganzes bilden.

Nach der Beschaffenheit der Krystallräume theilt man die hemiedrischen Körper in 2 Gruppen. Ist

1) von den Gränzflächen des Krystallraumes nur eine vorhanden (die parallele also fehlt), so erscheint die *geneigtflächige Hemiedrie*, wie in den Körpern $\left|a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a\right|$,

$\overline{\left|a : a : \frac{1}{n}a\right|}$, $\overline{|a : a : na|}$ und $\overline{|a : a : a|}$ häufig geschieht. In diesem Falle hat der hemiedrische Körper so viel Krystallräume, als der vollflächige, aber nur die Hälfte der Begränzungsebenen. Ist

2) jeder Krystallraum des hemiedrischen Körpers von seinen beiden Flächen begränzt, so heifst die *Hemiedrie die parallelflächige*. Sie tritt bei den Körpern $\overline{\left|a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a\right|}$, $\overline{\left|a : \frac{1}{n}a : \infty a\right|}$, $\overline{|a : a : \infty a|}$ und $\overline{|a : \infty a : \infty a|}$ auf. In diesem Falle hat der hemiedrische Körper nur die Hälfte der Krystallräume seines vollflächigen.

Aus den Leucitoiden entstehen Pyramidentetraeder; aus den Pyramidenoktaedern Trapezoidtetraeder; aus den 48flächnern gebrochene Pyramidentetraeder durch die geneigtflächige Hemiedrie.

Da die Leucitoide (Tab. V. Fig. 4.) die versteckten Kanten des Oktaeders zuschärfen, die Tetraederkanten aber versteckte Oktaederkanten sind, so müssen die Leucitoide die Kanten des Tetraeders zuschärfen. Werden aber rings um eine Fläche alle Kanten zugeschärft, und dringen diese Zuschärfungsflächen tief genug in den Körper ein, so muss sich über der Fläche eine Pyramide erheben, über den Dreiecken des Tetraeders eine dreiseitige, daher erhalten wir auf diese Weise das *Pyramidentetraeder* Fig. 9. mit $4 . 3 = 12$ Flächen, von denen keine der andern parallel geht. In jedem Leucitoide stecken zwei solche (je nachdem die Oktanten mit 1 oder mit 0 bezeichnet wachsen, pag. 190). Man kann sich das Pyramidentetraeder auch unmittelbar aus dem Leucitoide ableiten. Denkt man nemlich, dafs die drei Flächen eines Oktanten sich ausdehnen, die des anliegenden aber verschwinden (wie pag. 190 beim Oktaeder stattfand), so werden die drei dem verschwin-

denden Oktanten anliegenden gebrochenen Würfelkanten sich in einem Punkte vereinigen, die 3kantige Ecke, über dem wachsenden Oktanten gelegen, bleibt, und über dem verschwindenden Oktanten entsteht eine 3+3kantige Ecke, durch die drei wachsenden Würfelkanten und durch die drei neu entstehenden Tetraederkanten gebildet (man darf nur Fig. 4 mit Fig. 9 vergleichen, deren gleiche Glieder in beiden Figuren parallel laufen). Das Pyramidentetraeder hat also $3.4=12$ Pyramidenkanten (h), welche den gewachsenen Würfelkanten im Leucitoide entsprechen, und 6 Tetraeterkanten (t). Ebenso ergeben sich auch vier 3kantige Ecken von h begränzt, und vier 3+3kantige Ecken von h und t begränzt. Wie man das Leucitoid aus drei sich durchdringenden Oktaedern, so kann man das Pyramidentetraeder aus drei sich durchdringenden Tetraiden betrachten, von denen jedem Oktaeder eins angehört. Daher ist die obere Tetraederkante (t) aus zweien sich in c gegenüberliegenden Oktaederflächen entstanden, die zwei zugehörigen liegen gegenüber durch c', diese 4 zusammen würden verlängert ein Tetraid bilden.

Das Pyramidenoktaeder entsteht durch Zuschärfung der sichtbaren Oktaederkanten, die aber im Tetraeder verschwunden sind. Sollen diese Kanten am Tetraeder hervortreten, so mufs man sich zu den Tetraederflächen die Parallelen hinzudenken, welche die Tetraederecken abstumpfen würden. Daraus leuchtet dann ein, dafs die wachsenden Pyramidenoktaederflächen nicht von den Tetraederkanten, sondern von den Tetraederecken aus sich über den Tetraederflächen erheben müssen, ihr Umrifs wird daher, ähnlich den Flächen des Leucitoides, trapezoidal (ein Pyramidentetraeder mit Trapezoiden = *Trapezoidtetraeder* Fig. 10.). Daher sind jetzt die Tetraeterkanten (t) gebrochen und $2.6=12$ vorhanden; der Pyramidenkanten (π) sind ebenfalls $12=4.3$ vorhanden. Ecken sind jetzt aber dreierlei: 3kantige Ecken über den eingeschriebenen Tetraederflächen

von π gebildet; 3kantige Ecken in den Ecken des Tetraeders gelegen von t gebildet; 2+2kantige Ecken in der Mitte der gebrochenen Tetraederkanten von π und t gebildet. Die Entstehung dieses Körpers aus dem Pyramidenoktaeder läfst sich auch leicht verfolgen, denn wachsen um einen verschwindenden Oktanten die Flächen der drei anliegenden, so müssen die drei dem Oktanten zunächst liegenden Flächen sich zu einer 3kantigen Ecke erheben, in der 4+4 kantigen Ecke des Pyramidenoktaeders mufs daher eine 2+2kantige entstehen, während beim Hälftflächner des Leucitoides hier eine gerade Kante entstand. Fafst man diese Punkte fest, so ergibt sich daraus die Lage der drei Oktaederaxen. Wie die Oktaederaxen im Tetraeder die Mitte der sich quer gegenüberliegenden Kanten verbinden müssen, so ebenfalls im Pyramidentetraeder die Mitte der Tetraederkanten (t), im Trapezoidtetraeder aber die sich gegenüberliegenden 2+2kantigen Ecken.

Da wir den 48flächner als ein gebrochenes Leucitoid oder Pyramidenoktaeder betrachten können, so dürfen wir uns nur noch die gleichschenklichen Dreiecke des Pyramidentetraeders, oder die 2+2kantigen Trapezoide des Trapezoidtetraeders durch eine Kante symmetrisch gebrochen denken, wie Tab. V. Fig. 11. geschehen, um das *gebrochene Pyramidentetraeder* (gleich dem gebrochenen Trapezoidtetraeder) zu erhalten. Es wird von ungleichseitigen Dreiecken begränzt, hat daher dreierlei Kanten: gebrochene Tetraederkanten t, Pyramidentetraederkanten (h) und Trapezoidtetraederkanten (g); und dreierlei Ecken: 3+3 kantige in den Ecken, 3+3kantige über den Flächen und 2+2kantige in den Kantenmitten des eingeschriebenen Tetraeders. Ein Blick auf die Figuren zeigt Alles.

Wie der 48flächner für die vollflächigen, so ist das gebrochene Pyramidentetraeder für die hälftflächigen Krystalle der allgemeinste Körper. Greife ich irgend eine Fläche heraus, lasse sie mit der in der g anliegenden

zusammenfallen und mache es mit allen übrigen ebenso, so verschwinden die g, es entsteht das *Pyramidentetraeder*. Lasse ich sie mit der in h anliegenden Fläche zusammenfallen, so schwinden die h, und es entsteht ein Trapezoidtetraeder. Lasse ich endlich die sich in der gebrochenen Tetraederkante begränzenden zusammenfallen, so fallen die gebrochenen Tetraederkanten heraus und es entsteht ein parallelflächig hemiedrischer Körper (Pentagondodekaeder), der nicht in diese Reihe gehört. Lasse ich dann weiter zwei sich in der 3+3kantigen Ecke über der eingeschriebenen Tetraederfläche gegenüberliegende Flächen zusammenfallen, so schwinden g und h, es entsteht also ein Tetraeder, mit einfachen Kanten, denn ein Tetraeder mit gebrochenen Kanten und ebenen Flächen ist nicht denkbar. Lasse ich zwei in der 3+3kantigen Tetraederecke sich gegenüberliegende zusammenfallen, so entsteht das Gegentetraeder des vorigen. Lasse ich endlich zwei in der 2+2 kantigen Ecke sich gegenüberliegende Flächen zusammenfallen, so bekommen wir einen Würfel, der nicht in diese Reihe gehört, und die Kanten des eingeschriebenen Tetraeder abstumpfen würde.

Pentagondodekaeder.

Aus den Pyramidenwürfeln entstehen Pentagondodekaeder, aus den 48flächnern gebrochene Pentagondodekaeder durch parallelflächige Hemiedrie.

Versuchen wir das Gesetz: eine Fläche wachsen und die sämmtlichen ihr anliegenden verschwinden zu lassen, auf den Würfel und das Granatoeder anzuwenden, so findet sich bald, dafs bei diesen beiden Körpern das Gesetz nicht durchführbar ist. Es wird uns nicht gelingen, die 0 und 1 so auf ihre Flächen zu schreiben, dafs der Eins nur Nullen und der Null nur Einsen anliegen. Nur der Pyramidenwürfel ist solcher Hemiedrie noch fähig. Bezeichnen wir an ihm irgend eine Fläche mit 0, die drei ihr anlie-

genden mit 1, dann die den 1 anliegenden mit 0 etc., so zerlegen sich, falls wir mit der Bezeichnung zu Ende gekommen sind, die 24 Flächen in zwei Systeme, von denen das eine mit 0, das andere mit 1 bezeichnet steht. Hier geht nun aber nicht, wie beim Oktaeder, das eine System dem andern parallel, sondern jedes System zerfällt in sich in 2.6 Flächen, von denen die einen 6 den andern 6 parallel laufen. Lassen wir daher das eine System durch das andere verdrängen, so bekommen wir einen neuen Körper mit 6 Krystallräumen (2.6 Flächen), das Pentagondodekaeder (Tab. V. Fig. 12.), und umgekehrt. Um die Form des Pentagondodekaeder zu begreifen, mufs man die gleichbezeichneten (mit 1 bezeichneten z. B.) mit dem vollflächigen Pyramidenwürfel vergleichen. Die Hauptzonen des Pyramidenwürfels sind die seiner Würfelkanten, man kann denselben also als einen Körper mit drei achtseitigen Säulen betrachten, wo die 3 Würfelkanten *h* (Fig. 6.) die Säulenrichtungen bestimmen. Da nun durch Hemiedrie die Hälfte der Flächen herausfallen, so findet sich, dafs aus jeder achtseitigen Säule 4 Flächen verschwinden. Das Pentagondodekaeder behält demnach noch dieselben 3 Hauptrichtungen (*h* Fig. 12.) bei, allein die Säulen dieser Richtungen sind vierseitig geworden. Die 3 Kanten mit ihren 3 parallelen (Summa = 6), welche den Richtungen des eingeschriebenen Würfels genau entsprechen, heifsen daher *Hauptkanten* (oder Würfelrichtungen). Werfen wir ferner unsern Blick auf die 3+3kantigen Würfelecken des Pyramidenwürfels, so fallen hier 3 abwechselnde hinweg, wenn die andern 3 wachsen. Da sich die 3 wachsenden Flächen noch in demselben Punkte schneiden, wo sich die gesammten 6 schnitten, so mufs die Lage dieses Eckpunktes im Pentagondodekaeder dieselbe sein, wir bekommen daher 8 *dreikantige Würfelecken* (*ppp*). Aufserdem mufs aber noch über jeder verschwindenden Fläche des Pyramidenwürfels eine Ecke entstehen, diese mufs aber 2+1

kantig sein, da sie aus zwei Pentagonkanten (pp) und einer Hauptkante (h) gebildet ist. Der neue Körper zeigt demnach acht 3kantige Würfelkantenecken, nur durch p gebildet; zwölf 2 und 1kantige Ecken, durch pp und h gebildet, die an den Enden der Hauptkanten liegen; also Summa $12+8=20$. Die Kanten p verbinden die 3kantigen mit den 2+1kantigen Ecken; die h verbinden die 2+1kantigen Ecken unter sich; die 3kantigen Ecken sind aber nicht mit einander verbunden. Würde ich sie durch Linien verbinden, so bildeten diese Linien die Kanten des eingeschriebenen Würfels, über dessen Flächen die Pentagonflächen ein Dach bilden, dessen Kante einer Würfelkante parallel liegt, während beim Pyramidenwürfel auf jeder eingeschriebenen Würfelfläche ein Oktaeder (Pyramide) steht. Die Anzahl der Kanten ist $3 \cdot 8+6=30$. Es folgt diefs auch schon aus der Anzahl der Ecken. Da wir 20 dreiseitige Ecken haben, zweien anliegenden Ecken aber eine Seite gemein sein mufs, so gibt diefs $\frac{20 \cdot 3}{2} = 30$ Kanten. Ein Körper mit 12 Flächen und 30 Kanten kann aber nur von Pentagonen begränzt sein, weil $\frac{30}{5} = 6$ ist. Doch läfst sich die Erscheinung von fünfeckigen Gränzflächen am Pentagondodekaeder auch leicht zur Anschauung bringen. Wenn nemlich um eine wachsende Fläche des Pyramidenwürfels (welche mit ihrer Basis zwei 3+3kantige Würfelecken verbindet und mit ihren Seiten die Kanten der 4kantigen Ecke bildet), die drei in den Kanten anliegenden Flächen wegfallen, so werden in jeder anliegenden 3+3kantigen Würfelecke noch 2 wachsende Flächen, Summa $2+2=4$, in der 4kantigen Ecke aber noch eine wachsende Fläche sich befinden, es kommen mit der wachsenden fünf zum Schnitt, also wird dieselbe ein Fünfeck. *Das Pentagondodekaeder ist daher ein Körper mit 6 Krystallräumen, deren einzelne Gränzflächen von sämmtlichen Gränzflächen der übrigen geschnitten werden, aber so, dafs die Gränz-*

flächen der einen Seite die eine, die Gränzflächen der andern die andere schneiden (ein vollkommenes Gegenstück zum Hexaid, wo zwei Krystallräume von dem dritten und zum Oktaid, wo drei Krystallräume von dem vierten in ähnlichem Sinne geschnitten wurden).

Die einzelnen Pentagone sind symmetrisch, sie haben eine Grundlinie (*h* die Richtung des eingeschriebenen Würfels, daher auch *Grundkante* genannt), und 4 unter sich gleiche Pentagonkanten *p*. Die Fünfecke sind also 4+1 kantig, aber 2+2+1winklich, von denen zwei unter sich gleiche an der Grundkante liegen, einer der Grundkante gegenüber liegt; die übrigen unter sich gleichen zu den Seiten von *p* eingeschlossen werden.

Am einfachsten denkt man sich das Pentagondodekaeder als eine geschobene Säule, mit einem Paar Flächen auf die stumpfe, und einem andern Paare auf die scharfe Säulenkante gerade aufgesetzt, die 3 Kanten dieser 3 Säulen entsprechen den Richtungen der Axen (Würfelkanten).

Da man nun weiter den 48flächner als einen gebrochenen Pyramidenwürfel betrachten kann, so wird der Hälftflächner ein gebrochenes Pentagondodekaeder sein (Fig. 13.), indem die Pentagone in der Diagonale (*o*), welche die Mitte der Grundkanten (*h*) mit den 2+1kantigen Ecken (*pph*) verbindet, gebrochen sind. Die acht 3kantigen Würfelecken (*ppp*) sind daher geblieben. Die 2+1 kantigen Ecken werden aber jetzt durch die neue Kante *o* 2+1+1kantig (*ppho*), und in der Mitte jeder Grundkante (*h*) entsteht eine neue 2+2kantige Ecke (*hhpp*), die Grundkanten erscheinen dadurch gebrochen. Der Körper ist also nicht mehr von Pentagonen, sondern von 2+1+1kantigen Trapezoiden begränzt (*ppho*), wohl aber kann man in ihn ein Pentagondodekaeder einschreiben. Aber alles leuchtet unmittelbar aus den Figuren 6, 7, 12 und 13 hervor.

Anmerk. Wenn es sich blos um die Durchführung eines Princips handelt, so würde man consequent alle Kör-

per untersuchen müssen, ob das Gesetz der Hemiedrie, nach welchem eine Fläche wächst, während die ihr anliegenden verschwinden, möglicher Weise auf sie anwendbar ist. Man sieht sogleich ein, dafs die Körper, welche Vier- oder Fünfecke zu Gränzflächen haben, einer Hemiedrie nach dem ausgesprochenen Gesetze gar nicht fähig sind. Es können daher nur die Körper mit dreieckigen Gränzflächen zur Sprache kommen. Vom Oktaeder und Pyramidenwürfel ist die Hemiedrie nachgewiesen. Es bliebe also das Pyramidenoktaeder, Pyramidentetraeder, gebrochene Pyramidentetraeder und der 48flächner zu untersuchen übrig. Bezeichnen wir am Pyramidenoktaeder oder Pyramidentetraeder (Tab. V. Fig. 5. und 9.) irgend eine Fläche mit 1, die ihr anliegende mit 0, so zeigt sich gleich, dafs um eine 0 nie drei, sondern nur zwei Mal die 1 liegen kann und umgekehrt. Daher ist das Gesetz auf diese Körper nicht anwendbar.

Wohl aber ist das Gesetz auf das gebrochene Pyramidentetraeder (Fig. 11.) anwendbar. Denn bezeichnen wir in diesem irgend eine Fläche mit 1, die anliegenden mit 0, so liegen der Eins Nullen, den Nullen Einsen an, das Gesetz ist also anwendbar. Es mufs diefs auch der Fall sein, da man den Pyramidenwürfel (Fig. 6.) als ein gebrochenes Pyramidentetraeder betrachten kann, dessen Dreiecke gleichschenklich, während beim wahren Pyramidentetraeder die Dreiecke ungleichschenklich sind. In beiden Fällen sehen wir aber auf der eingeschriebenen Tetraederfläche 3 Flächen wachsen, und die 3 damit abwechselnden verschwinden. In beiden Fällen erhalten wir einen gleichflächigen Körper von Pentagonen begränzt, nur ist der Körper des gebrochenen Pyramidentetraeder unsymmetrischer und hat 12 Krystallräume. Hier wollen wir ihn jedoch nur erwähnt haben, da er in der Natur nicht vorkommt.

Dasselbe gilt auch vom 48flächner, wir bekommen durch Anwendung des Principes einen 24flächigen Körper,

der sich zum Pyramidengranatoeder, wie sich das Pentagondodekaeder zum Pyramidenwürfel, verhält. Auch ihn übergehen wir, da er sich ebenfalls nicht in der Natur findet.

Verbinden sich die einzelnen Krystallformen untereinander, so herrscht meist eine vor, an welcher die Flächen der übrigen untergeordnet auftreten. Man orientirt sich schnell in solche Formen, wenn man die Verhältnisse der Kantenzonen des Oktaeders, Würfels und Granatoeders in der allgemeinen Projektionsfigur Tab. I. festhält.

Vor allem müssen wir festhalten, dafs jeder Zonenpunkt eine Säule darstellt, und betrachten wir diese Säule, so denken wir alle übrigen Punkte als nicht vorhanden, wenden unsere ganze Aufmerksamkeit nur auf diesen einen Punkt der Säule. In diesem Zonenpunkte stellen drei Sektionslinien etwa eine sechsseitige Säule dar, die aus einer vierseitigen mit abgestumpfter Kante besteht. Fällt die Sektionslinie der Abstufungsfläche in den scharfen Winkel, so stumpft die zugehörige Fläche die stumpfe Kante, fällt sie in den stumpfen Winkel, so stumpft die zugehörige Fläche den scharfen Winkel ab.

Nehmen wir also irgend einen der 4 Endkantenzonenpunkte des Oktaeders (*o* und *o* Tab. I. z. B. der Zonenpunkt in *a*), so liegt zwischen *o*..*o*, welche die stumpfe Säulenkante darstellen mögen, die Würfelfläche *h*, sie stumpft also dann die scharfe Säulenkante (die versteckte Oktaederkante) ab. Die Flächen *h* und *o* bilden eine Säule mit stumpfem und scharfem Winkel. Die Leucitoederfläche *l* liegt im scharfen Winkel derselben, also stumpft sie die stumpfe Kante der Säule *ho* ab. So alle Leucitoidflächen, da sie sämmtlich zwischen der Oktaeder- und Würfelfläche liegen, also die stumpfe Kante beider abstumpfen. Zwischen die Granatoeder- und Oktaederfläche in den scharfen Winkel würden die Sektionslinien der Pyra-

midenoktaeder fallen, von denen keine in die Figur eingezeichnet ist. Sie stumpfen also den stumpfen Winkel ab, welchen die Granatoederfläche mit der Oktaederfläche bildet.

Wählen wir irgend einen Würfelkantenzonenpunkt, z. B. den Mittelpunkt der Construktion, so liegt zwischen Granatoeder und Würfelfläche im scharfen Winkel der Pyramidenwürfel, dieser stumpft also die stumpfe Säulenkante vom Würfel und Granatoeder ab. Andere Flächen als Pyramidenwürfel- und Granatoederflächen liegen nicht in der Kantenzone des Würfels.

In der Kantenzone des Granatoeders liegen solche Flächen, deren Axenausdrücke

$$\overline{\left|\frac{a}{m} : \frac{a}{m-1}\right|}$$

zum Zeichen haben. Denn da der Zonenpunkt des Granatoeders ein Kantenzonenpunkt $\left(\frac{a}{1} + \frac{a}{1}\right)$ ist, so läfst sich dieser Satz aus A. §. 72. leicht folgern. Es liegen darin zuerst zwei Granatoederflächen, für welche $m = o$, also

$$\overline{\left|\frac{a}{o} : \frac{a}{o-1}\right|} = \overline{|\infty a \;:\; a|}.$$

Aufserdem die dritte Granatoederfläche, die durch den Mittelpunkt geht, wo $m = \infty$, also $\overline{\left|\frac{a}{\infty} : \frac{a}{\infty}\right|} = \overline{|oa : oa|}$. Die Fläche, welche dieser Sektionslinie angehört, hat also das Zeichen

$$\overline{\left|\frac{a}{\infty} : \frac{a}{\infty} : a\right|} = \overline{|a : a : \infty a|},$$

ist also eine Granatoederfläche. Zwischen zwei solchen Granatoederflächen im scharfen Winkel liegt die Leucitoederfläche

$$\overline{|a : a : \tfrac{1}{2}a|},$$

da $2 - 1 = 1$ ist; sie stumpft also die Kante des Granatoe-

ders ab. Da in der Kantenzone des Granatoeders 3 Granatoederflächen liegen, so liegen auch 3 Leucitoederflächen (*l*) darin. Aufserdem liegen aber noch im scharfen Winkel zweier Granatoederflächen 2 Flächen des 48flächner

$$\overline{|a : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a|},$$

da 3—2=1; es mufs demnach dieser 48flächner die stumpfe Kante des Granatoeders durch 2 Flächen symmetrisch zuschärfen.

Einige Anwendungen:

1. *Der Würfel.* Da die Kanten des deducirten Würfels als die Axen des zugehörigen Oktaeders angesehen werden können, so kann man schon aus den Axenausdrücken die Lage der am Würfel untergeordneten Flächen erkennen. In der Kantenzone des Würfels liegen demnach nur Flächen, deren eines Axenzeichen ∞ hat, weil sämmtliche Flächen die Kante des Würfels abstumpfen oder zuschärfen müssen, um in der Kante des Würfels liegen zu können. Zwischen je zwei Hexaidflächen (*h* Tab. IV. Fig. 24.) liegt das *Granatoeder* (*d*), es stumpft also die Würfelkante ab, und da die Axenausdrücke desselben $\overline{|a : a : \infty a|}$ sind, so mufs die zugehörige Fläche zwei Kanten ($\alpha\beta = \alpha\gamma$) in der Gleichheit schneiden, der dritten Kante ($\alpha\alpha$) aber parallel gehen, wie die punktirten Linien der Fig. 24. Tab. IV. andeuten. Die *Pyramidenwürfelflächen* (π), welche sämmtlich im scharfen Winkel zwischen *d* und *h* liegen (Tab. I.), stumpfen daher die stumpfen Kanten zwischen *dh* ab, und hätte z. B. die Fläche π (Tab. IV. Fig. 25.) den Ausdruck $\overline{|a : \tfrac{1}{2}a : \infty a|}$, so würde sie die Axen ($\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ Fig. 24.) unter demselben Verhältnifs schneiden, so dafs $\alpha\beta$ um das Doppelte gröfser sein müfste, als $\alpha\gamma$ und umgekehrt. Alle weitern Flächen anderer Pyramidenwürfel, die möglicher Weise auftreten können, müssen die Winkel zwischen $d\pi$ oder $h\pi$ abstumpfen. Sie stumpfen $d\pi$ ab, wenn sich das

Verhältnifs $a : \frac{1}{m} a$ dem Verhältnisse $a : a$ (dem Granatoeder) nähert, also m der 1 näher kommt; πh, wenn sich das Verhältnifs $a : \frac{1}{m} a$ davon entfernt. Ist keine weitere Zone bekannt, so mufs zur Bestimmung solcher Flächen am Krystall noch ein Winkel gemessen sein.

Das *Oktaeder* (Fig. 26. Tab. IV.) stumpft die Ecken des Würfels ab, da es den Ausdruck $\overline{\underline{|a : a : a|}}$ hat, die Kantenlängen, welche *o* von den Würfelkanten abschneidet, müssen daher unter sich gleich sein, folglich das kleine Dreieck *o* (Fig. 26.) ein gleichseitiges werden. Alle Flächen, welche im scharfen Winkel zwischen *oh* liegen, stumpfen die stumpfe Kante *oh* ab. Dahin gehören die verschiedenen *Leucitoide*, sie bilden alle eine Zuschärfung der Würfelecke, Fläche auf Fläche aufgesetzt (Tab. IV. Fig. 27.). Es folgt diefs auch unmittelbar aus dem Axenausdrucke $\overline{\underline{\left|a : a : \frac{1}{n} a\right|}}$, d. h. zwei Kanten in der Gleichheit geschnitten, die dritte aber kleiner. Anders verhalten sich die *Pyramidenoktaeder*, sie liegen zwar in derselben Zone von *h* nach *o*, aber fallen in den scharfen Winkel zwischen Granatoeder und Oktaederfläche (*d* und *o* Fig. 25.), müssen also den stumpfen Säulenwinkel dieser beiden Flächen abstumpfen, daher werden die Flächen des Pyramidenoktaeders auf die Granatoederfläche, oder was dasselbe ist, auf die Würfelkante (Fig. 28.) gerade aufgesetzt sein. Gehen wir also vom Granatoeder aus nach der Oktaederfläche hin, so kommen wir zunächst in das Pyramidenoktaeder, dann in die Oktaederfläche, über die Leucitoidfläche in den Würfel. Der 48*flächner* mufs 6flächig die Würfelecke zuschärfen (Fig 29. Tab. IV.), weil in einem Oktanten sechs Flächen liegen, wie der Ausdruck $\overline{\underline{|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|}}$ ergibt. Man sieht zu gleicher Zeit daraus, dafs

eine solche Fläche die drei Würfelkanten in der Ungleichheit schneiden mufs. Da dieser 48flächner in die Kantenzone des Granatoeders fällt, so mufs er die Kanten zuschärfen, welche d und d (Fig. 25.) mit einander machen würden. In die Kantenzone des Oktaeders oder Würfels fällt ein 48flächner nie.

2. *Das Oktaeder*. Der *Würfel* stumpft die Ecken seines zugehörigen Oktaeders ab. Das *Leucitoeder* (l) (sowie jedes Leucitoid) mufs also die Kante zwischen h und o abstumpfen, und denkt man sich h verschwinden, so bilden die l an der Oktaederecke eine vierflächige Zuschärfung (Tab. IV. Fig. 30.), Fläche auf Fläche aufgesetzt. Man kann diefs auch unmittelbar aus dem Axenausdrucke ableiten. Die l mufs in der Oktaederkante liegen (mit ihr also parallel gehen), die dritte Axe aber kleiner schneiden, also nach der Spitze hingekehrt sein (die versteckte Oktaederkante zuschärfen!). Das *Granatoeder* stumpft die Oktaederkante ab, zwischen Granatoeder- und Oktaederfläche liegt das *Pyramidenoktaeder* (t Fig. 31. Tab. IV.); folglich mufs letzteres die Oktaederkante zuschärfen. Wir haben also in der Kantenzone des Oktaeders von der Granatoederfläche über die Pyramidenoktaeder- (t), Oktaeder- (o) und Leucitoederfläche (l) hinweg bis zur Würfelfläche (h) eine Zone, ganz wie beim Würfel der Fall war. Die *Pyramidenwürfel* (π) liegen zwischen Würfel und Granatoeder, müssen daher deren stumpfe Kanten abstumpfen. Denkt man sich die h und d verschwinden (Fig. 32. Tab. IV.), so bilden die π an der Oktaederecke eine vierflächige Zuschärfung, Fläche auf Kante gerade aufgesetzt. Es liefse sich dieses ebenfalls schon einfach aus dem Axenausdrucke $\pi = \overline{\underline{|a : \frac{1}{2}a : \infty a|}}$ finden. Denn eine Fläche $d = \overline{\underline{|a : a : \infty a|}}$ stumpft die Oktaederkante ab; soll aber das zweite a kleiner geschnitten werden, so mufs die Fläche π schief in die Oktaederkante eindringen, so dafs π mit dem anlie-

genden o zwei nach oben divergirende Kanten (πo und πo) macht. Da wo die Kanten hin divergiren, liegt die kleinere Axe, eine allgemeine Regel. Der 48*flächner* schärft die Ecken sechsflächig zu.

3. *Das Granatoeder.* Der *Würfel* stumpft die vierkantigen Ecken des Granatoeders ab (Tab. V. Fig. 15. h). Zwischen Granatoeder (d) und Würfel (h) liegt der *Pyramidenwürfel*, folglich müssen durch letzteren die Kanten der erstern beiden abgestumpft werden. Wir erhalten also eine Zuschärfung der oktaedrischen Granatecken, Fläche auf Fläche aufgesetzt. Die dreikantigen Ecken des Granatoeders werden durch die *Oktaederflächen* (o) abgestumpft, wodurch die Oktaederflächen in die Diagonalzone des Granatoeders fallen müssen, d. h. die Granatoederflächen müssen die Kante des Oktaeders abstumpfen, wie die Zone von o über d nach o zeigt. Zwischen Oktaeder und Würfel mufs ferner die *Leucitoederfläche* (l) liegen, folglich mufs sie mit h und o in eine Zone fallen. Fällt sie zugleich mit d und d in eine Zone, wie in Fig. 15. Tab. V. der Fall, so erhält die Fläche den bestimmten Ausdruck $|a : \frac{1}{2}a : a|$. Zwischen h und l würde eine Fläche $\left|a : \frac{1}{n}a : a\right|$ liegen, wo n gröfser als 2, und zwischen l und o eine Fläche, wo n kleiner als 2, wo also erstere die Axe ($\frac{1}{n}a$) unter kleinerm, letztere dieselbe Axe unter gröfserm Verhältnisse als $\frac{1}{2}$ schneiden müfste. Das *Pyramidenoktaeder* (t) liegt aber zwischen d und o, folglich mufs es deren Kante abstumpfen, so dafs wir wieder von d über t, o, l und h dieselbe Zone wie oben verfolgen können. (In der Fig. 15. Tab. V. sind die Flächen nur theilweis angedeutet.) Die 48*flächner* werden im Allgemeinen die 4kantigen Ecken achtflächig zuschärfen, haben sie aber den Ausdruck

$\left|a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{m+1}a\right|$ (z. B. $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$, $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a|$, $|a : \frac{1}{5}a : \frac{1}{6}a|$),

so liegen sie in der Kantenzone des Granatoeders, und schärfen alsdann die Granatoederkante zu, so dafs bei gehöriger Ausdehnung der Flächen ein Pyramidengranatoeder entstehen mufs.

4. *Das Tetraeder.* Am Tetraeder stumpft das *Gegentetraeder* die Ecken ab, da mathematisch genommen Tetraeder und Gegentetraeder ein Oktaeder bilden müssen. Folglich gilt von diesem Oktaeder alles, was vom Oktaeder gesagt ist. Der *Würfel* mufs die 6 Tetraederkanten abstumpfen, denn es sind die versteckten Kanten des Oktaeders. Die Abstumpfung mufs aber so sein, dafs die h sowohl mit zweien o, als auch mit zweien o' in eine Zone fallen. Dadurch sind uns die Lagen aller weitern Flächen gegeben. Zwischen oh und $o'h$ liegen die *Leucitoederflächen* (l). Die eine Hälfte zwischen ho bildet bei gehöriger Ausdehnung ein Pyramidentetraeder. Die andere Hälfte zwischen ho' ist auf die Tetraederkante aufgesetzt und schärft die Tetraederecken zu. Wenn wir von h über l nach o gehen, so mufs in dieser Richtung das Pyramidenoktaeder und Granatoeder (d) folgen. Das *Granatoeder* stumpft aber die Kante zwischen oo' ab, folglich bildet es eine dreiflächige Zuschärfung an den Tetraederecken, aber Flächen auf Flächen aufgesetzt (Fig. 17.). Zwischen Granatoeder (d) und o' liegt die eine Hälfte des *Pyramidenoktaeder*, zwischen d und o die andere; beide Hälften bilden eine Zuschärfung der Ecken, wenn sie in gehöriger Ausdehnung gedacht werden, Fläche auf Fläche aufgesetzt, sie können also vom Granatoeder nur durch Winkel oder durch einen zweiten Zonenverband unterschieden werden. Aus der Lage des Granatoeders läfst sich auch leicht die des Leucitoeders folgern. Der *Pyramidenwürfel* liegt zwischen Würfel- und Granatoederfläche, mufs also deren Kante abstumpfen. Da aber 6 solcher Kanten in eine Tetraederecke fallen, so wird dadurch die Tetraederecke sechsflächig zugeschärft. Auch der 48*flächner* stumpft die Tetraederecken

sechsflächig zu, die eine Hälfte anders, als die andere. Kommt selten vor.

5. *Das Pentagondodekaeder.* Die 6 Grundkanten werden durch den *Würfel* abgestumpft, so dafs die Würfelflächen mit je zwei Zuschärfungspaaren (das Pentagondodekaeder als Säule mit Zuschärfungspaaren gedacht) in eine Zone fällt. Da wir die 6 Grundkanten als die Axenrichtungen denken können, so ersehen wir aus ihnen, dafs die Hexaidfläche vieren derselben parallel geht, während sie die beiden andern schneidet. Gehen wir von der Würfelfläche über die Pentagondodekaederfläche hinaus, so kommen wir in die Granatoederfläche (man sehe nur auf den Pyramidenwürfel!). Folglich mufs das *Granatoeder* die 12 zweiundeinkantigen Ecken an den Grundkanten abstumpfen. Gehen wir aber noch weiter, so liegt unter der Granatoederfläche die Fläche eines Pyramidenwürfels (hier Pentagondodekaeders), bis wir zuletzt wieder in eine Würfelfläche kommen. So dafs zwischen zwei Würfelflächen die Granatoederfläche und eine Reihe von verschiedenen Pentagondodekaederflächen liegen, alle sind gerade aufgesetzt auf die Kante der Säule eines Pentagondodekaederpaares.

Das *Oktaeder* stumpft die 8 gleichkantigen Würfelecken ab, denn man darf nur den eingeschriebenen Würfel hineinziehen, um sogleich den Beweis zu haben. Das Oktaeder mufs nemlich von den drei Würfelkanten gleiche Stücke abschneiden, folglich auch von den Kanten der gleichkantigen Würfelecken. Daher werden die kleinen Dreiecke der untergeordneten Oktaederflächen gleichseitig. Aus den eingeschriebenen Kanten des Würfels kann man alle Verhältnisse der untergeordneten Flächen leicht erkennen. Treten Pentagondodekaeder- und Oktaederflächen mit einander ins Gleichgewicht, so erhalten wir einen Körper mit $12+8=20$ Dreiecken (π und o Fig. 19. Tab. V.); sie bilden ein Icosaeder, was aber nicht von 20 gleichseitigen Dreiecken, wie das Icosaeder der Mathematik, son-

dern von 8 gleichseitigen Oktaeder-, und 12 gleichschenklichen Pentagondodekaederflächen begränzt wird. Die 6 Grundkanten des Pentagondodekaeders bilden die Grundkanten der 12 Dreiecke, während die 24 Kanten (die sogenannten Combinationskanten) des Pentagondodekaeders und Oktaeders die gleichen Schenkel bilden.

Die *Leucitoidflächen* müssen im Allgemeinen die 24 Kanten der Würfelecken unter divergenten Kanten abstumpfen (die Würfelecken dreiflächig zuschärfen), so dafs die Flächen schief auf die Kanten aufgesetzt sind, denn sie liegen zwischen Oktaeder- und Würfelfläche, müssen also die Kanten beider abstumpfen. Nur ein einziges Leucitoid wird in die Zone der 24 Kanten fallen. Denn projiciren wir z. B. die Flächen des Pentagondodekaeders $\overline{|a : \frac{1}{2}a : \infty a|}$ auf die Würfelfläche, wie auf Tab. I. geschehen (wir dürfen nur die Hälfte der Flächen des Pyramidenwürfels $|a : \frac{1}{2}a : \infty a|$ aus der Figur auf das Papier auftragen), so bekommen wir 4 Zonenpunkte $= (2a + a)$, in diesen sehen wir die Leucitoidfläche $\lambda = \overline{|a : a : \frac{1}{3}a|}$ und die Fläche des 48flächner $\overline{|a : 3a : \frac{3}{2}a|} = \overline{|\frac{1}{3}a : a : \frac{1}{2}a|}$ liegen, folglich müssen beide die Kanten abstumpfen (Tab. V. Fig. 20. *g* und Fig. 28. cf. das Beispiel des Schwefelkieses, wo diefs deutlicher auseinandergesetzt wird).

Die *Pyramidenoktaederflächen* verhalten sich ähnlich zu den Kanten der Würfelecken, allein sie liegen zwischen Oktaeder und Granatoeder. Das Granatoeder stumpft aber die 2+1kantigen Ecken an den Grundkanten ab, daher werden sie mehr auf die Pentagondodekaederflächen aufgesetzt erscheinen, während die Leucitoidflächen mehr auf die Kanten.

Die *48flächner* treten hälftflächig als gebrochene Pentagondodekaeder auf, sie schärfen ebenfalls die Wür-

felecken dreiflächig zu. Es kommen deren eine ganze Reihe vor.

Tritt das Pentagondodekaeder untergeordnet am Oktaeder, Würfel etc. auf, so darf man sich nur erinnern, wie der Pyramidenwürfel untergeordnet auftrat. Das Pentagondodekaeder stumpft die Kanten des Würfels schief ab, weil die eine der beiden Zuschärfungsflächen des Pyramidenwürfels wegfallen mufs; es schärft die Oktaederecken zweiflächig zu, Fläche auf Kante gerade aufgesetzt, denn die andern beiden der vierflächigen Zuschärfung des Pyramidenwürfels fehlen etc.... Man darf bei allen diesen sich nur das Gesetz der Hemiedrie wieder recht klar ins Gedächtnifs rufen.

Ist ein System vollflächig, so treten die untergeordneten Flächen aller Körper vollflächig auf; ist ein System aber nur halbflächig, so erscheinen, mit Ausnahme des 48flächner, alle Flächen vollständig, die nicht zum halbflächigen System derselben Abtheilung gehören.

Dafs in vollflächigen Systemen alle Flächen vollständig auftreten, hat sich aus der Deduktion bereits ergeben (Tab. I.). Wenn hingegen gesetzmäfsig Glieder fehlen, so mufs die Vollständigkeit gestört werden. Haben wir ein geneigtflächig-hemiedrisches (tetraedrisches) System, so treten nur die geneigtflächig hemiedrischen Körper halbflächig auf, nemlich Tetraeder, Pyramidentetraeder und Trapezoidtetraeder, die andern Körper Würfel, Granatoeder und Pyramidenwürfel vollflächig. Man sieht dieses gleich ein, wenn man die drei letzten Körper am Tetraeder auftreten läfst. Die 6 Würfelflächen werden zunächst die 6 Kanten des Tetraeders abstumpfen müssen, da keine Tetraederkante sich von der andern unterscheidet. Denken wir uns nun die Würfelflächen ausgedehnt, so wird das Tetraeder am Würfel die abwechselnden Ecken abstumpfen, sämmtliche Würfelkanten haben daher eine gleiche Lage gegen die 4 Tetraederflächen. Tritt weiter das

Granatoeder hinzu, so mufs diefs ebenfalls vollflächig erscheinen, weil, da es die Kanten des Würfels abstumpft, alle seine Flächen eine gleiche Lage gegen die Tetraederflächen einnehmen. Dasselbe gilt von den Zuschärfungsflächen der Würfelkanten, den Pyramidenwürfelflächen. Mit dem Leucitoeder, Pyramidenwürfel und 48flächner verhält es sich aber ganz anders. Da diese Körper die Ecken des Würfels zuschärfen, die eine Hälfte der Ecken aber durch das Tetraeder abgestumpft ist, die andere nicht, so mufs die an den abgestumpften Ecken auftretende Hälfte physikalisch verschieden sein von der an den nicht abgestumpften auftretenden, d. h. die eine Hälfte von Flächen ist vorhanden, wenn die andere nicht vorhanden ist, oder treten beide Hälften neben einander auf, so sind sie von einander physikalisch verschieden.

Im parallelflächighemiedrischen Systeme (pentagondodekaedrischen) treten der Würfel und das Granatoeder (die keiner Hemiedrie fähig), das Oktaeder, die Leucitoide und Pyramidenoktaeder vollflächig, die Pyramidenwürfel und 48flächner aber hälftflächig auf. Denn das Oktaeder stumpft am Pentagondodekaeder die 8 gleichkantigen Würfelecken ab, und hat eine gleiche Lage gegen die drei Flächen der abgestumpften Ecke. Dehnt sich das Oktaeder aus, so erscheinen an jeder Oktaederecke zwei Pentagondodekaederflächen, welche die Oktaederflächen so zuschärfen, dafs die Zuschärfungsflächen auf die Kanten grade aufgesetzt sind. Dadurch sind die 6 Oktaederecken und 12 Oktaederkanten nicht untereinander verschieden worden, denn in jeder Oktaederecke liegen zwei Pentagondodekaederflächen, und auf jeder Kante steht eine grade aufgesetzt. Der Würfel und das Granatoeder, welche solche Ecken und Kanten abstumpfen, können also nicht in sich different werden. Ebenso die Leucitoid- und Pyramidenoktaederflächen, die die Säulenkanten des Oktaeders zuschärfen. Wohl aber die Pyramidenwürfel und 48fläch-

ner, denn diese erscheinen an einem Ende der Oktaederkanten, das allerdings durch die Gruppirung der Pentagondodekaederflächen vom andern Ende verschieden geworden ist.

Der 48flächner tritt also in beiden hemiedrischen Systemen als Hälftflächner auf, nur in verschiedener Weise, als gebrochenes Pyramidenoktaeder oder gebrochenes Pentagondodekaeder.

Beispiele zum regulären Systeme.

Flufsspath.

Der Würfel $|a : \infty a : \infty a|$ ist die vorherrschendste Form des Flufsspaths, seine Flächen sind zwar häufig sehr verzogen, aber je drei auf einander rechtwinkliche Kanten und die gleiche physikalische Beschaffenheit der Flächen (sie sind glänzend, theilweis parallel den Diagonalen gestreift, mit welligen Punkten bedeckt, von denen zuweilen radiale Streifen auslaufen) lassen den krystallographischen Würfel niemals verkennen. Treten die Oktaederflächen $|a : a : a|$, welche die Würfelecken abstumpfen, auf, so sind sie matt und rauh, weil ihnen ein ausgezeichnet blättriger Bruch parallel geht. Denn wir finden es häufig, dafs wenn ein Krystallraum eines Minerals sehr blättrig ist, die Gränzfläche des Krystallraumes, sobald sie als Krystallfläche auftritt, drusig und matt erscheint. Der vierfach blättrige Bruch, der den 4 Krystallräumen eines regulären Oktaeders genau entspricht, ist das wichtigste Erkennungsmerkmal des Flufsspaths. Wie die Oktaederfläche, so stumpft auch der blättrige Bruch die Ecken des Würfels ab, und gewöhnlich bemerkt man am Würfel nach diesen Richtungen Sprünge. Stofst man daran, so fällt die Ecke ab, und anstatt der Ecke findet sich ein glänzend gleich-

seitiges Dreieck. Kneipt man mit der Zange ein Stück blättrigen Flufsspathes (von dem man sich um geringen Preis in den meisten Kaufläden grofsen Vorrath leicht verschaffen kann) in beliebige Stücke, so kann man sich die Menge von Formen darstellen, welche durch vier Krystallräume möglicher Weise gebildet werden können. Man erhält ein Tetraeder, wenn von jedem Krystallraume abwechselnd nur eine Gränzfläche bleibt; ein Rhomboeder, wenn nur drei Krystallräume sich ausdehnen, an dem dann der vierte die gleichkantige Ecke abstumpft; sehr verzogene achtflächige Körper, wenn man die Krystallräume sich verschieden ausdehnen läfst; doch werden wir immer finden, dafs bei jeder beliebigen Ausdehnung auf jeder Fläche drei Zonenrichtungen und nie mehr auftreten. Das Granatoeder $\overline{|a : a : \infty a|}$ stumpft die Kanten des Würfels ab. Beide Granatoeder und Oktaeder treten an Würfel untergeordnet auf (Tab. IV. Fig. 5.), in diesem Falle bildet die Granatoederfläche (d) ein Rechteck, weil sie sowohl die Würfel- als auch die Oktaederkante abstumpfen mufs, d. h. von einer Oktaeder- (o) über die Granatoeder- zur Oktaederfläche, und von einer Würfel- (h) über die Granatoeder- zur Würfelfläche ist eine Zone entwickelt. Daraus folgt dann an sich, dafs von der Würfel- zur Oktaeder- und Granatoederfläche eine dritte Zone (Kantenparallelität) sein mufs [siehe die Projektion]. Zuweilen wird auch Oktaeder- oder Granatoederfläche vorherrschend, aber sie haben dann immer ein drusiges Ansehen. Der Würfel stumpft dann die 4kantigen Ecken des Oktaeders oder Granatoeders ab, und das Oktaeder am Granatoeder die dreikantigen Würfelecken. Aufser diesen drei Formen kommt ein niedriger Pyramidenwürfel $\overline{|a : \frac{1}{3}a : \infty a|}$ noch ganz vorherrschend vor, doch ist er selten ganz selbstständig ausgebildet, der zugehörige Würfel stumpft meist die 4kantigen Ecken der 6 vierseitigen Pyramiden, wenn

auch nur schwach, ab. Herrscht der Würfel vor, so schärft der Pyramidenwürfel die Kanten zu, so dafs jede vierseitige Säule des Würfels dadurch zur zwölfseitigen wird. In diesem Falle stellt sich noch der bei andern Systemen gewöhnlichere Pyramidenwürfel $|a : \frac{1}{2}a : \infty a|$ ein, der allein, oder mit jenem in Verbindung am Würfel erscheinen kann, wodurch die Würfelkanten zuweilen cylindrisch abgerundet werden. Selbst der 48flächner $|a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{2}a|$ dehnt sich hin und wieder so bedeutend aus, dafs man die mit vorkommenden Würfelflächen, welche die 4+4kantigen Oktaederecken abstumpfen, für untergeordnet halten möchte. Sobald jedoch die Würfelflächen wieder das Uebergewicht bekommen, schärfen die 6.8 = 48 Flächen die 8 Würfelecken sechsflächig zu, wodurch die Würfelecken 3+3kantig werden. Aufser dem gewöhnlichen Leucitoeder $|a : a : \frac{1}{2}a|$ kommt das Leucitoid $|a : a : \frac{1}{3}a|$ vor, auch ein Leucitoid $|a : a : \frac{3}{8}a|$, zwischen beiden liegend, wird angeführt. Da sie alle zwischen Oktaeder- und Würfelfläche (im scharfen Winkel) liegen, so müssen sie deren stumpfe Kante abstumpfen, also eine dreiflächige Zuschärfung (Fläche auf Fläche aufgesetzt) der Würfelecke bilden (man denke sich am Würfel die Oktaederfläche hinzu!). Vorherrschend wird keine derselben. Auch von Pyramidenoktaedern, welche die Kanten des Oktaeders zuschärfen, sind mehrere bekannt: $|a : a : 2a|$ und $|a : a : 3a|$, aber nur untergeordnet. Fügen wir zu diesen noch den Pyramidenwürfel $|\frac{1}{2}a : \frac{1}{5}a : \infty a|$ und zwei 48flächner $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{7}a|$, $|\frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a : \frac{1}{11}a|$, so sehen wir beim Flufsspath einen Reichthum von Flächen auftreten, worin er kaum von einer andern Mineralspecies übertroffen werden dürfte.

Der innere Zusammenhang aller dieser Flächen untereinander kann nur wahrhaft durch eine vollständige Pro-

jektion ergründet werden, theilweis kann uns jedoch Tab. I. aushelfen. Hat man eine solche Figur nicht gleich zur Hand, so darf man blos die Körper (nicht einmal vollständig, sondern nur die erforderlichen Flächen) besonders projiciren, um einzelne Verhältnisse schnell einzusehen. Im Allgemeinen treten diejenigen Flächen am häufigsten auf, welche die schon vorhandenen Kanten abstumpfen oder zuschärfen, und gerade deren Ausdrücke sind am leichtesten zu finden.

Wenn wir noch einmal beim Würfel beginnen, so stumpft das Granatoeder die Würfelkanten ab, das Leucitoeder $|a : a : \tfrac{1}{2}|$ wieder die Kante des Granatoeders, wie aus der Projektion (Tab. I.) einleuchtet, man darf zu diesem Behufe sich nur die 2 Achsen a in die Projektionsebene der Würfelfläche einzeichnen (Tab. I. a und b), und daran zwei anliegende Granatoederflächen $|a : a : \infty a| = d$ legen (auf Tab. I. $|a : c : \infty b|$ und $|b : c : \infty a|$), so mufs eine Fläche l, wodurch die Kante der beiden d gerade abgestumpft wird (d. h. die in die Zone zweier Oktaeder- und Granatoederflächen fällt, also mit der Sektionslinie $|a : a|$ parallel geht), die Axen a unter der doppelten Länge schneiden, also $l = |a : 2a : 2a| = |\tfrac{1}{2}a : a : a|$ ($|2a : 2b : c|$) sein; der Ausdruck der Leucitoederfläche. Das Leucitoeder hat aber zweierlei Kanten: gebrochene Oktaeder- und gebrochene Würfelkanten. Die gebrochenen Oktaederkanten gehen in der Projektionsfigur (Tab. I.) von dem aufrechtstehenden a nach $2a$ der Projektionsebene. Eine Fläche π, welche diese Kante gerade abstumpft (d. h., welche im Zonenpunkte $2a$ und in der Kantenzone des Würfels liegt), geht mit einem a der Sektionsebene parallel, während das andere im doppelten Verhältnifs geschnitten wird, daher ist $\pi = |2a : \infty a : a| = |a : \tfrac{1}{2}a : \infty a|$, die Fläche des Pyra-

midenwürfels. Würde letzterer die Kante des Würfels zuschärfen, während das Leucitoeder die Ecke zuschärfte, so würde man sehen, dafs je zwei Leucitoederflächen in die Diagonalzone des Pyramidenwürfels fallen, d. h. dafs die Pyramidenwürfelflächen die gebrochenen Oktaederkanten des Leucitoeders abstumpfen.

Eine Fläche, welche die gebrochene Würfelkante des Leucitoeders abstumpft, läfst sich aus der allgemeinen Projektionsfigur Tab. I. leicht finden. Man darf nur den Zonenpunkt dieser Kanten aufsuchen, welcher durch zwei Sektionslinien $\overline{\underline{|a : \frac{1}{2}a|}}$ und $\overline{\underline{|a : \frac{1}{2}a|}}$ gebildet wird. Nehmen wir an, dafs beide Flächen in einem Quadranten liegen (im vordern rechten), so mufs der Zonenpunkt ein Kantenzonenpunkt sein, den wir bereits A. §. 74. 1*stes Beispiel* gefunden haben, er ist $(\frac{a}{3} + \frac{a}{3})$, wie man schon unmittelbar aus der Figur ersieht. Legen wir durch diesen Punkt eine Sektionslinie der Sektionslinie der Oktaederfläche parallel, so erhalten wir die Fläche

$$\overline{\underline{|a : \tfrac{2}{3}a : \tfrac{2}{3}a|}} = \overline{\underline{|\tfrac{1}{2}a : a : a|}},$$

wie am obigen Orte gezeigt wurde. Viel direkter ohne alle Rechnung wird die Fläche gefunden, wenn man zuerst den Kantenzonenpunkt von der Sektionslinie $\overline{\underline{|a : \frac{1}{2}b|}}$ sucht, er ist $(\frac{a}{1+2} + \frac{b}{1+2})$. Eine Fläche, welche durch diesen Punkt und der Oktaedersektionslinie $\overline{\underline{|a : b|}}$ parallel geht, fällt zugleich in den Kantenzonenpunkt $(\frac{a}{0} + \frac{b'}{0})$, folglich schneidet sie die Axen im Verhältnifs $\overline{\underline{\left|\frac{2a}{0+3} : \frac{2b}{0+3}\right|}}$ (A. §. 72.). Um dies einzusehen, darf man nur das Lineal durch den Punkt $(\frac{a}{3} + \frac{b}{3})$ der Linie $\overline{\underline{|a : b|}}$ parallel

legen. Beim Flufsspath ist dieses Pyramidenoktaeder noch nicht nachgewiesen, es findet sich aber sehr vollkommen beim Granat.

Der Pyramidenwürfel $|a : \frac{1}{3}a : \infty a|$ mufs nach denselben Regeln die gebrochene Oktaederkante vom Leucitoide $|a : a : \frac{1}{3}a|$ abstumpfen. Die gebrochene Würfelkante desselben Leucitoides wird durch das Pyramidenoktaeder $|a : a : 2a|$ abgestumpft. Man darf nur statt 2 in A. §. 74. 1*stes Beispiel* 3 setzen. Aber auch ein Blick auf die Figur gibt es, wenn wir das Lineal durch den Kantenzonenpunkt $(\frac{a}{4} + \frac{b}{4})$ der Sektionslinie $|a : b|$ parallel legen. Denn diese Sektionslinie gehört der verlängerten Fläche an. Damit der Anfänger sich nicht verirrt, darf er sich nur ein Leucitoid projiciren, und die projicirten Flächen, sowie deren Sektionslinien mit gleichen Buchstaben versehen!

Die dreierlei Kanten des 48flächner $|a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{2}a|$ werden sämmtlich durch vorhandene Flächen abgestumpft. Die gebrochenen Oktaederkanten haben das Zeichen $|\frac{1}{4}a : \frac{1}{2}a|$ oder, um ein bestimmtes Beispiel zu wählen, $|\frac{1}{4}c : \frac{1}{2}a|$ $= |c : 2a|$ (Tab. I.), die diese Kante abstumpfende Fläche ist also der Pyramidenwürfel $|a : 2a : \infty a|$. Die gebrochene Würfelkante (z. B. der Flächen $|\frac{1}{4}a : \frac{1}{2}b : c|$ und $|\frac{1}{4}b : \frac{1}{2}a : c|$) bildet auf der Projektionsebene einen Kantenzonenpunkt, von den Sektionslinien $|\frac{1}{4}a : \frac{1}{2}b|$ und $|\frac{1}{2}a : \frac{1}{4}b|$ erzeugt. Setzen wir daher in der allgemeinen Formel (A. §. 73.) $m = 2$, $n = 4$ und $m' = 4$, $n' = 2$, so erhalten wir den Zonenpunkt:

$$\frac{2-4}{2.2-4.4}\,a + \frac{2-4}{2.2-4.4}\,b = (\tfrac{1}{6}a + \tfrac{1}{6}b);$$

oder kurz nach A. §. 72. *Zusatz:*

$$\left(\frac{a}{4+2} + \frac{b}{4+2}\right).$$

Der zweite Zonenpunkt, durch welchen die Sektionslinie der zu suchenden Abstumpfungsfläche geht, ist $\left(\frac{a}{o} + \frac{b'}{o}\right)$, d. h. der Sektionslinie $\overline{\underline{|a : b|}}$ parallel. Um die Sektionslinie dieser beiden Zonenpunkte zu finden, setzen wir in die allgemeine Formel (A. §. 70.) für $m=6$, $n=6$, $m'=0$, $n'=0$, so erhalten wir:

$$\frac{6.0 - (-0).6}{6.0\,(6+0)}\,a : \frac{6.0 - (-0).6}{6.-0\,(0.6)}\,b$$

$$= \frac{6+6}{6.6}\,a : \frac{6+6}{6.6}\,b = \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{3}b;$$

oder kurz nach A. §. 72:

$$\frac{2a}{6+0} : \frac{2b}{6+0} = \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{3}b.$$

Die zu dieser Sektionslinie gehörige Fläche hat daher den Ausdruck $\overline{\underline{|a : \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{3}a|}} = \overline{\underline{|3a : a : a|}}$, die Fläche des vorkommenden Pyramidenoktaeders.

Die Granatoederkante (eigentlich sind es die Kanten des eingeschriebenen Pyramidenwürfels, da nur den 48-flächnern $\overline{\underline{\left|c : \frac{1}{n+1}b : \frac{1}{n}a\right|}}$ sich wirkliche Granatoeder einschreiben lassen, doch mögen die Kanten der Analogie wegen so genannt sein), z. B. die durch die Flächen $\overline{\underline{|\tfrac{1}{4}c : \tfrac{1}{2}a : b|}}$ und $\overline{\underline{|\tfrac{1}{4}c : \tfrac{1}{2}b : a|}}$ gebildete, geht von $\tfrac{1}{4}c$ nach der Sektionslinie der Kantenzonenpunkte. Da wir aber alle Flächen durch die Einheit legen, so sind die Flächen

$$\overline{\underline{|c : 2a : 4b|}} \text{ und } \overline{\underline{|c : 2b : 4a|}}$$

zu schreiben, folglich schreiben wir, nach A. §. 72. *Zusatz*

den Kantenzonenpunkt der Granatoederkante zu finden, die zugehörigen Sektionslinien

$$\frac{1}{(\frac{1}{2})}a : \frac{1}{(\frac{1}{4})}b \text{ und } \frac{1}{(\frac{1}{2})}b : \frac{1}{(\frac{1}{4})}a.$$

Nach beiden ist der zugehörige Kantenzonenpunkt

$$\frac{a}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} + \frac{b}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{4a}{3} + \frac{4b}{3},$$

wozu die Sektionslinie, welche diesen Kantenzonenpunkt mit dem $\frac{a}{0} + \frac{b'}{0}$ verbinden soll,

$$\frac{2.4a}{3} : \frac{2.4b}{3} = \frac{8a}{3} : \frac{8b}{3}$$

gehört. Wir haben dadurch das Leucitoid $\overline{|a : a : \frac{3}{8}a|}$ erhalten, das zuweilen beim Flufsspath beobachtet worden ist.

Fahlerz.

Ein ausgezeichnet tetraedrisches System. Vorherrschend sind gewöhnlich die Umrisse eines Tetraeders 1 $\overline{|a : a : a|}$, wo die vorgesetzte „1“ bedeuten soll, dafs wir nur die wachsenden Flächen 1 pag. 190 im Zeichen begreifen wollen, während die parallelen 0 $\overline{|a : a : a|}$ fehlen. Da aus jedem Oktaeder zwei Tetraeder entstehen können (Tetraeder und Gegentetraeder), so unterscheidet man diese auch wohl als rechte und linke, oder positive und negative. Durch die Form sind beide Tetraeder durchaus nicht verschieden, sondern wenn man aus einem Oktaeder im Gleichgewicht beide entstehen läfst, sind sie beide einander kongruent. Daher ist der Gegensatz beider nur ein relativer, nennen wir das eine Tetraeder (positiv oder recht), so ist das andere das Gegentetraeder (negativ oder link) und umgekehrt. Daher kann man nicht sagen, in einem System kommt das Tetraeder, im andern das Gegentetraeder vor, sondern wenn ein System tetraedrisch ist, so

geht man von dem herrschenden Tetraeder aus (nennt dies recht, link...), dieses wollen wir mit 1 $|\overline{a : a : a}|$ bezeichnen. Es erscheint beim Fahlerz gewöhnlich (*o* Tab. V. Fig. 22., diese und Fig. 21. und Fig. 23—24. sind gegen Fig. 8—11. und Fig. 16—18 gehalten in der Gegenstellung gezeichnet, allein deshalb sind es immer dieselben Tetraeder, man hätte sie ebenfalls in derselben Stellung zeichnen können, ob wir daher von der einen oder der andern Figur sprechen, wird den Anfänger nicht irre machen), und alle übrigen Flächen werden durch dieses bedingt. Das Gegentetraeder 0 $|\underline{a : a : a}|$ tritt zwar auch auf (*o'* Tab. V. Fig. 22.), allein es stumpft immer die Ecken nur wenig ab, so daſs der Umriſs des Haupttetraeders vorherrschend bleibt. Wie wir die beiden Tetraeder durch die vorgesetzte Null und Eins unterscheiden, gerade so können wir auch alle folgenden hemiedrischen Körper bestimmen, wo die mit Null versehenen sich gegenseitig wie die mit Eins versehenen verhalten. Beide Tetraeder bilden an sich (Tab. V. Fig. 16.) ein vollkommenes Oktaeder mit 6 versteckten und 12 offenbaren Kanten, um daher die Lage aller folgenden Flächen zu finden, darf man nur immer diese Kanten im Auge haben. Die Natur hat jedoch beide Tetraeder unterscheiden wollen, denn die Flächen des erstern sind immer glänzend, und parallel den Tetraederkanten markirt durch gleichseitige Dreiecke gestreift, hingegen die Flächen des andern sind matt und nicht gestreift, abgesehen davon, daſs sie gewöhnlich zurücktreten oder ganz fehlen. Daſs die Oktaederaxen die Mitte der gegenüberliegenden Kanten verbinden müssen, geht aus der Entstehung des Tetraeders hervor, denn die Eckpunkte des eingeschriebenen Oktaeders fallen in die Mitte dieser Kanten, und nur unter dieser Voraussetzung können die Tetraederflächen ihr Axenzeichen $|\overline{a : a : a}|$ erhalten. Dann aber ergibt sich die Lage der Würfelfläche (*h* Fig. 23. und Fig. 17.) leicht,

sie mufs die Tetraederkante abstumpfen, wodurch sie mit o/o in eine Zone fällt, dann schneidet sie gewifs auch die Axe, welche die Mitte der abgestumpften Kante verbindet. Allein in dieser Tetraederkante (versteckten Oktaederkante) liegen noch manche Flächen, soll die Würfelfläche daher bestimmt sein, so mufs sie noch in einer zweiten Zone liegen, in Zone o'/o' (Fig. 16. o' mit ausgezogenen Linien) oder in l'/l' Fig. 23., und diefs ist auch wirklich stets der Fall; denn kommen die Flächen o und o' mit h zum Schnitt, so ist h stets ein Oblongum. Die Würfelflächen treten aber vollflächig auf, weil die 6 Tetraederkanten unter sich nicht different sind, wird daher eine abgestumpft, so müssen sie alle auf dieselbe Weise abgestumpft erscheinen. Mit dem Tetraeder o hängen die Leucitoederflächen (l Fig. 21—23.) in engerm Zusammenhange, sie schärfen die Tetraederkanten zu, liegen also in der Oktaederkantenzone (von o nach l, l und o Fig. 22.). Jede Fläche, die in einer Oktaederkantenzone liegt, also durch Bewegung in die Oktaederkante gelegt werden kann, mufs den Ausdruck $\boxed{a : a : \frac{1}{m} a}$ haben, wo $a : a$ die Oktaederkante bezeichnet, $\frac{1}{m} a$ aber den unbestimmten Schnitt der dritten Axe. In unserm Falle mufs $\frac{1}{m}$ kleiner als 1 sein, weil l die scharfe Kante der Oktaedersäule abstumpft, man lege sich dieselbe nur an ein Axenkreuz, um das Gesagte einzusehen. Die Gröfse von $\frac{1}{m}$ zu finden, bedürfen wir eine zweite Zone. Wir sehen, dafs l die Kante zwischen d und d abstumpft (Fig. 21—23.), weil von d über l nach d eine Kantenparallelität sich vorfindet. Die Flächen d stumpfen aber die Kante zwischen o und o' ab (Fig. 22.), also die Oktaederkanten, daher vermuthen wir sogleich, dafs dies Granatoederflächen sein möchten, weil die Granatoederflächen die Te-

traederecken dreiflächig zuschärfen (Fig. 18. und 21.); allein es könnten etwa noch Pyramidenoktaeder sein, die ebenfalls in der Kantenzone liegend ein Gleiches thun. Doch unsere Vermuthung bestätigt sich dadurch, dafs Fig. 21. jedes der beiden linken untern *d* mit je zweien der rechten obern über *l* hinweg in eine Zone fällt, es bilden die *d* unter sich 2 sechsseitige Säulen, und nehmen wir die kaum sichtbare untere rechte *d* noch hinzu, so bildet diese mit jenen fünfen noch 2 sechsseitige Säulen. Also bilden die 6 Flächen 4 sechsseitige Säulen, daher gehören sie entschieden einem Granatoeder an, und ihr Ausdruck wird $d = \overline{|a : a : \infty a|}$. Auch aus Fig. 23. liefse sich dieselbe Folgerung durch die 2 Zonen d, π, h, π, d machen. Steht also *d* fest, so fällt *l* in die Kantenzone von *d*, sie stumpft die Kante des Granatoeders ab, ist also das Leucitoeder $l = 1 \overline{|a : a : \frac{1}{2}a|}$, folglich $m = 2$. Diese gewöhnlich vorkommenden Leucitoederflächen erscheinen entschieden nur zur Hälfte, welche Hälfte so eng mit den Flächen des Haupttetraeders im Zusammenhange steht, dafs sich die Streifungen der Tetraederflächen ebenfalls in ihr fortsetzen; dehnt sich diese Hälfte vor allen übrigen aus, so entsteht ein Pyramidentetraeder. Aber auch die andere Hälfte (l' Fig. 24.) des Leucitoeders fehlt nicht, sie stumpft die übrigen Granatoederkanten ab, die durch ihre Lage gegen die Oktaederflächen different sind. Denn wenn die *l* die von *h* nach *o* gehende Granatoederkante abstumpft, so stumpft die l' die von *h* nach o' gehende ab, oder mit andern Worten: *l* liegt zwischen *h* und *o*, und l' zwischen *h* und o'. Die *l* verhält sich also zu *o*, wie die l' zu o'. Die Granatoederflächen *d* konnten unter sich in dieser Weise nicht different werden, denn

1) stumpfen sie die Oktaederkanten von *o* und o' gebildet ab, die alle unter sich gleich sind, weil in jeder derselben eine Tetraeder- und Gegentetraederfläche liegt;

2) stumpfen die Granatoederflächen zugleich auch die Würfelkanten ab (zwischen je zwei h Fig. 23.), die alle unter sich physikalisch gleich sind. Aus diesem folgt dann weiter, dafs sämmtliche differenten Flächen gegen die Granatoederflächen symmetrisch liegen müssen. Dies leuchtet namentlich aus Fig. 24. ein, wo auf einer Seite der d zwei l, auf der andern aber zwei l' angränzen, und so ist jede Granatoederfläche gelegen. Dies sind dann auch die Gründe, warum das Granatoeder, wie der Würfel, vollständig auftreten mufs. Gehen wir weiter, so finden wir in Fig. 23. zwischen Granatoeder- (d) und Würfelfläche (h) eine Abstumpfungsfläche π, diese mufs, noch ehe wir weiter etwas von ihr kennen, nothwendig einem vollflächigen Körper angehören, weil sie die durch zwei vollflächige Körper (d und h) gebildete Kante abstumpft. Wir finden nun auch richtig, dafs von h über $\pi d \pi$ nach h eine Zone (Kantenparallelität) geht, wenn d die Kante h/h abstumpft, so müssen die beiden seitlichen π dieselbe zuschärfen. Würde die Fläche π bei ihrem Schnitte mit hdl und l' ein Oblongum bilden, so würde sie zu gleicher Zeit die Kante l/l' abstumpfen, und dann wäre $\pi = \overline{|a : \frac{1}{2}a : \infty a|}$. Allein wenn wir Fig. 23. die breite Fläche h uns horizontal denken und durch den Axenpunkt a gehen lassen, so würden um denselben Einheitspunkt a die 4 Leucitoederflächen $ll'll'$ gelagert sein, deren Kanten l/l' von a nach $2a$ herablaufen, gegen diese Kanten liegt π so, dafs sie nach oben divergirende Kanten macht, also kann die π nicht wie die Leucitoederkante von a nach $2a$ hinabgehen, sondern von a nach einem gröfsern als $2a$, etwa $3a$, d. h. $\pi = \overline{|a : 3a : \infty a|}$ $= \overline{|a : \frac{1}{3}a : \infty a|}$. Dafs diese Muthmafsung richtig sei, folgt aus einer zweiten Zone; wir sehen nemlich, dafs wenn wir von π nach einem anliegenden l' gehen, in der Kante π/l' noch die folgende l' liegt; dasselbe gilt auch von π über l nach l. Die π fällt also in eine fern liegende Leucitoe-

derkante. Tragen wir die $\pi = \overline{\underline{|a : \frac{1}{3}a : \infty a|}}$ in Tab. I. ein, so werden wir allerdings finden, dafs eine solche Fläche zu beiden Seiten in eine Kante des Leucitoeders fallen mufs. So leicht lösen sich die schwierigsten Probleme, durch einen Blick auf die Figur.

Ueberschauen wir noch einmal kurz die entwickelten Flächen! Sie waren zuerst Tetraeder und Gegentetraeder, Pyramidentetraeder und Gegenpyramidentetraeder (1 $\overline{\underline{|a : a : \frac{1}{2}a|}}$ und 0 $\overline{\underline{|a : a : \frac{1}{2}a|}}$). Diese beiden Gruppen stehen sich gewissermafsen gegenüber, die positive für sich, die negative für sich, die eine wächst oder schwindet auf Kosten der andern, die eine schliefst die Krystallräume auf der einen, die andere auf der andern Seite. Ganz unabhängig von diesem relativen Gegensatz mit auf beiden Seiten gleichartig geschlossenen Krystallräumen treten der Würfel, das Granatoeder und der Pyramidenwürfel auf. Dehnt sich ein Körper derselben aus, so erscheinen die übrigen daran nur untergeordnet, wodurch nicht selten der tetraedrische Habitus verwischt wird. So findet man namentlich bei gewissen Varietäten gern, dafs das Granatoeder sich mit matten Flächen ausdehnt. Nur eine einzige Fläche gibt an unsern gezeichneten Krystallen der positiven Seite das Uebergewicht, die Fläche n in Fig. 21., sie stumpft die Leucitoederkanten der dreikantigen Ecken (also die gebrochenen Würfelkanten) ab, und mufs demnach einem Pyramidenoktaeder angehören. Zwar müfste man, um ihn genau zu bestimmen, noch eine Zone kennen, allein wenn in einer Kante l/l des regulären Systemes, die aus gleichwerthigen Flächen gebildet wird, nur eine Fläche auftritt, so kann man fast immer sicher sein, dafs die Kante durch die Abstumpfungsfläche gerade abgestumpft wird, eine solche haben wir (A. §. 74. 1*stes Beispiel*) schon als $\overline{\underline{|a : a : \frac{3}{2}a|}}$ bestimmt. Würde in Fig. 21. die dreiseitige

Ecke (*ddd*) durch die Oktaederfläche *o'* abgestumpft, so würden *o'dn* parallele Kanten bilden, Kanten, die der Oktaederkante parallel laufen. Dafs dieses Pyramidenoktaeder hälftflächig auftritt, folgt schon aus der Lage gegen die Leucitoederflächen *l*. Auch das gebrochene Pyramidentetraeder kommt zuweilen am Fahlerz vor, namentlich der Hälftflächner von $|\overline{a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a}|$, da ein solcher Körper in die Kantenzone des Granatoeders fällt (weil 3—2=1), so mufs er auch die Granatoederkanten zuschärfen. Allein wenn diese schon für die Abstumpfungsflächen (*l* und *l'*) different lagen, so mufs dasselbe auch für die Zuschärfungsflächen der Fall sein. Wir finden Fig. 25. durch die Flächen *g* die Kante *d/l* abgestumpft, was also, da *g* auf beiden Seiten von *l* auftreten mufs, eine Zuschärfung der Granatoederkante gibt. Eine zweite Zone läfst sich hier nicht auffinden, daher müssen Winkelmessungen die Axenausdrücke bestimmen. Dafs dieser 48flächner nur zur Hälfte auftritt, folgt schon daraus, dafs zwischen *d* und *l* nur 24 Kanten möglich sind, die übrigen 24 aber den *d/l'* angehören.

Schwefelkies.

Das Pentagondodekaeder des Schwefelkieses, wenigstens dasjenige, was am häufigsten erscheint, ist der Hälftflächner des Pyramidenwürfels $|\overline{a : \frac{1}{2}a : \infty a}|$ (Tab. V. Fig. 12.); es ist das einzige, welches selbstständig ohne alle andern Flächen auftritt, und da es sich vorzugsweise beim Schwefelkies findet, wird es auch wohl *Pyritoeder* (*Pyrites*, ein Stein, der Funken gibt) genannt. Die Grundkanten *h* herrschen an ihm so vor, dafs diesem parallel sich gewöhnlich eine sehr markirte Streifung findet. Das Gegenpyritoeder tritt nicht auf, es kommt nur in Zwillingen vor, wo sich zwei selbstständige Pyritoeder so durchdringen, dafs ihre Grundkanten (*h*) sich rechtwinklich kreuzen, Fig. 26.; die lichten Flächen gehen den Flächen

Fig. 12. parallel, die gestreiften bilden das Gegenpyritoeder, würde man die 2+1kantigen Pyramiden, mit deren Basalseiten sich die zwei Pyritoeder begränzen, wegnehmen, so würde ein Pyramidenwürfel entstehen. Wir können auch hier, wie beim tetraedrischen Systeme, das Zeichen

$$1\,\overline{\underline{|a : \tfrac{1}{2}a : \infty a|}} \text{ und } 0\,\overline{\underline{|a : \tfrac{1}{2}a : \infty a|}}$$

einführen, woraus schon von selbst nach pag. 196 folgt, dafs jedes einzelne nur 6 Krystallräume in sich begreift.

Das pyritoedrische System erstreckt sich bis jetzt nur auf 4 geschwefelte Minerale:

Schwefelkies	$= Fe\,S^2$,
Glanzkobald	$= Co\,S^2 + Co\,Ar^2$,
Nickelglanz	$= Ni\,S^2 + Ni\,Ar^2$,
Nickelantimonglanz	$= Ni\,S^2 + Ni\,Sb^2$,

deren chemische Atomzahl in vieler Hinsicht übereinstimmt. Alle 4 haben elektrischpositive Atome (Eisen = Fe, Cobald = C, Nickel = Ni), die sich in chemischen Formeln gegenseitig ersetzen können, ohne dafs dadurch die Krystallform wesentlich verändert wird. Verbinden sich damit nun 2 Atome Schwefel (S^2), so erhalten wir ebenfalls gleiche Formen (Fe^2S^2, CoS^2, $Ni\,S^2$,). Die 3 letztern Minerale bestehen aber nicht rein aus diesen, sondern es tritt noch Arsenik und Antimon hinzu, die unter sich sehr ähnliche Krystallform haben, und daher auch in gleichen Verbindungen mit Schwefel einander ähnliche Systeme beibehalten. Die Verbindungen $CoAr^2$, $NiAr^2$ gehören dem vollflächigen regulären Systeme an, folglich auch möglicher Weise $NiSb^2$, weil Sb mit As isomorph ist. Mischen sich daher diese 3 Glieder wechselseitig mit jenem geschwefelten, so wird das System dadurch nicht geändert. Die ersten 4 geschwefelten Glieder haben das Bestreben, ein pyritoedrisches System zu bilden, die hinzutretenden Glieder ein reguläres vollflächiges, von dem Würfel, Granatoeder, Oktaeder, Leucitoid, Pyramidenoktaeder sich mit dem Pen-

tagondodekaeder vollflächig vereinigen können. Was wir daher vom Schwefelkies sagen, kann möglicher Weise für alle 4 gelten.

Zum Pyritoeder gesellt sich nun äufserst häufig der Würfel $\overline{\underline{|a : \infty a : \infty a|}}$ (*h* Fig. 27.), welcher die 6 Grundkanten abstumpft, und mit dem Pyritoeder gleiche Streifung zeigt. Sehr häufig dehnt er sich so aus, dafs er vollkommen selbstständig auftritt, die Pyritoederstreifung ist für ihn dann überaus bezeichnend. Jeder Krystallraum hat nur eine ihm eigenthümliche, die einer Würfelkante parallel geht. Die Streifungen deuten nichts weiter an, als die Schnittlinien, unter welchen die Pyritoederflächen (und zwar das gegen die Hauptkante gewendete Ende) die Würfelflächen treffen. Weil der Pyramidenwürfel die Würfelkanten zweiflächig zuschärft, von diesen zwei Flächen aber nur eine dem Pyritoeder angehört, so mufs das Pyritoeder die Würfelkanten einflächig und schief abstumpfen.

Das Oktaeder stumpft die 8 dreikantigen Ecken (*ppp* Fig. 12.) ab, seine Flächen sind sehr glänzend. Da die Kanten und die sie bildenden Flächen unter sich alle gleich sind, so mufs das Oktaeder gegen alle eine gleiche Lage zeigen, es mufs also von den Kanten *p* gleiche Stücke wegnehmen, folglich, so lange es durch diese Kanten und deren Flächen begränzt wird, ein gleichseitiges Dreieck bilden (*o* Fig. 27., Fig. 19., Fig. 20., wo das Dreieck nur wegen der Projektion ungleichseitig erscheint). Tritt das Oktaeder blos mit dem Pyritoeder in Verbindung, und dehnt es sich so weit aus, dafs die Pyritoederflächen ebenfalls zu Dreiecken werden, so bekommen wir ein Icosaeder (20flach, Fig. 19.) das aber nicht mit dem mathematischen von 12 gleichseitigen Dreiecken begränzten übereinstimmt, sondern das sich in $12\pi + 8o$ zerlegt, die *o* sind gleichseitig und glattglänzend, die π sind gleichschenklich (die Grundkante

π/π zur Basis) und der Grundkante parallel gestreift. Der Körper kommt oftmals im Gleichgewicht (bei Schwefelkies und Glanzkobald) vor. Dehnt sich das Oktaeder aber noch weiter aus, so treten nach und nach seine Umrisse schärfer hervor, und die π bilden an jeder Ecke zweiflächige, auf die Oktaederkanten gerade aufgesetzte, Zuschärfungen, mit divergirenden Kanten. (Fig. 19. zeigt diefs schon, wenn man die vier o sich als vier um einen Axenpunkt gelagerten Oktaederflächen aufrecht denkt, zwischen denen dann nur zwei π seitlich auftreten, mit zur Axenspitze divergirenden Kanten, während die beiden andern π von oben und unten an dieser Ecke fehlen.)

Das Granatoeder würde (Fig. 27.) die eine Kante zwischen Würfel- (h) und Pyritoederfläche (π) abstumpfen, die andere nicht. Denn vergleichen wir das oben quer vorliegende h und das aufrechtstehende h mit dem zwischen liegenden π, so hat π gegen das querliegende h eine andere Neigung, als gegen das aufrechte h, weil π die Würfelkante h/h schief abstumpfen mufs, daher zerlegen sich die Kanten π/h in zwei Gruppen, $2 \cdot 12 = 24$ solcher Kanten sind nur möglich, also kommen von diesen 12 auf das Granatoeder. Um nun weiter zu sehen, welche von diesen beiderlei Kanten abgestumpft werden mufs, denken wir uns dieselben beiden Hexaidflächen in gleicher Lage an dem Pyramidenwürfel (Fig. 6., vielleicht auch zu gröfserer Deutlichkeit noch an dem darunterstehenden Pyritoeder, Fig. 12.), dann leuchtet ein, dafs wir von den querliegenden h ausgehend in der Zone nach h hin zunächst nach der Pyramidenwürfel-, oder was dasselbe, zur Pyritoederfläche π kommen, später erst zur Granatoederfläche (welche in Fig. 6. ja die quer zwischenliegenden Kante h abstumpfen mufs), um dann wieder in eine Pyramidenwürfelfläche zu gelangen (im Pyritoeder fehlend, da sie dem Gegenpyritoeder angehören würde), welche der aufrechtstehenden h am nächsten liegt. Wir ersehen daraus, dafs

die Granatoederfläche die Kante zwischen π und dem aufrechten h abstumpfen mufs, oben wie unten am aufrechten h, die seitlichen Kanten am aufrechten h nicht, dafür dann aber wieder die seitlich folgenden Kanten, welche π mit dem seitlichen h macht..... Das Granatoeder, welches nicht sehr häufig erscheint, mufs also vollflächig sein.

Sehr häufig findet sich noch die Kante zwischen o und π durch g (Fig. 20.) abgestumpft. Die Abstumpfung mufs von einem 24flächigen Körper herrühren, da um jedes o sich drei mit π erzeugte gleiche Kanten lagern, also 3.8. Scharf läfst sich die Fläche, da man nur eine Zone kennt, nicht bestimmen, allein annäherungsweise sehr genau. Zu dem Ende verfertigen wir uns Fig. 28. Die querliegende h (Fig 27.) ist als Projektionsebene gedacht, alsdann bilden die aufrechte h die zur Axe genommene Sektionslinie $b \ldots b'$, und die seitliche h die zur Axe genommene Sektionslinie $a \ldots a'$. Projiciren wir gegen diese Axen die obere vordere π (Fig. 27.), so geht sie von $\overline{|\tfrac{1}{2}c : a|}$, da wir aber alle Flächen durch die Einheit c legen, von c zu $2a$, sobald wir sie nur parallel mit sich nach c verrücken. Die obere rechte o (Fig. 27.) liegt im rechten vordern Quadranten, hat also das Zeichen $\overline{|a : b : c|}$, folglich zur Sektionslinie $o \ldots o$, welche die $\pi \ldots \pi$ im Zonenpunkte $(2a + b')$ schneidet, folglich geht die Kante zwischen den obern vordern π und dem obern rechten o von diesem Zonenpunkte aus nach der Einheit c, jede Fläche, welche diese Kante abstumpfen soll, mufs also durch diesen Zonenpunkt gehen; zwischen o und π im scharfen Winkel liegen eine Reihe von 48flächnern (g, γ), die also den stumpfen Winkel (π/o) abstumpfen, unter ihnen ist $g = \overline{|c : \tfrac{3}{2}a : 3b|}$ $= \overline{|\tfrac{1}{3}c : \tfrac{1}{2}a : b|}$ der gewöhnliche 48flächner. Der Zonenpunkt mit dem Mittelpunkte verbunden bestimmt eine zweite $\pi = \overline{|b : 2a : \infty c|}$; der Zonenpunkt mit a' verbunden

bestimmt $\lambda = \overline{|a' : \frac{1}{3}b' : c|}$; der Zonenpunkt mit b' verbunden bestimmt $d = \overline{|b : c : \infty a|}$ etc.. Alle diese liegen in der Kantenzone π/o (aber wohl bedacht, daſs wir die Parallelen von π' und o hinzunehmen, und beide Krystallräume π und o zu einer langen vierseitigen Säule ausdehnen müssen!). Beginnen wir in π und gehen über die sichtbare stumpfe Kante nach o fort, so kommen wir, ehe wir o erreichen, nach und nach in die Abstumpfungsflächen dieser Kanten g, γ etc.. und zuletzt nach o; gehen wir in dieser Richtung weiter fort, so würden wir zu einem π kommen, dieſs kann nur dasjenige π sein, welches in dieser Gegend dem Gegenpyritoeder angehört (in der Zone zwischen dem aufrechten und dem seitlichen h liegt); über dieses π hinaus (also unterhalb des seitlichen h) kommt endlich das Leucitoid λ und darunter noch das Dodekaid. Von allen diesen Flächen aber können nur die 48flächner jene stumpfe Kante π/o abstumpfen, dem einfachsten $g = \overline{|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|}$ geben wir den Vorzug, und diesen bestätigen dann auch wirklich die Winkelmessungen. Würde dieser 48flächner allein vorherrschen, wie es häufig der Fall ist, so bildet er ein gebrochenes Pentagondodekaeder (Fig. 13.).

Auch die andere Hälfte des 48flächner kommt vor, sie stumpft die 24 Pyritoederkanten p ab (Fig. 29.). Denke ich mir in Fig. 28. zum vordern π das π über dem seitlichen h hinzutreten, so geht deren Kante von c zum Zonenpunkte $(2a + \frac{1}{2}b)$, verbinde ich diesen Punkt mit $3a$, so erhalte ich eine Fläche $g' = \overline{|3a : \frac{3}{2}b : c|} = \overline{|a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c|}$, also die andere Hälfte des 48flächner $\overline{|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a|}$. Es liegt zwischen g' und dem vordern π noch eine Sektionslinie $\overline{|\frac{5}{2}a : \frac{5}{2}b|}$, die also einem Leucitoide $\overline{|\frac{2}{5}a : a : a|}$ angehören würde, jedoch noch nicht beachtet ist. Die scharfe

Kante dieser Säule (also im anliegenden Quadranten der Sektionslinien des vordern π und rechten seitlichen π Fig. 28.) sehen wir durch das Leucitoeder $l = \overline{|a : c : \frac{1}{2} b'|}$ und durch ein Pyramidenoktaeder $t = \overline{|c : b' : \frac{4}{3} a|}$ abgestumpft. Nehmen wir also zu den zwei gewählten π die parallelen hinzu, so würden t und l die scharfe Kante abstumpfen; d. h. denken wir uns die an den Enden einer Kante p Fig. 12. anliegenden π ausgedehnt, so bilden diese die scharfe Kante der besprochenen Säule, diese scharfe Kante wird nun von der einen Seite durch die l, von der andern durch die t so zugeschärft, dafs von π über t und l nach π Kantenparallelität stattfindet.

Durch diese Betrachtung sind wir nun in den Stand gesetzt, die schwierigsten Krystalle mit Leichtigkeit zu entwickeln. Wählen wir hierzu die complicirten Peruanischen Schwefelkieskrystalle Fig. 30. Die ausgedehnten Flächen h zeigen deutlich den Umrifs eines Würfels, diefs leitet uns auf die Würfelkanten h/h, in welchen die Pentagondodekaederflächen π und p liegen, beide müssen daher im Allgemeinen einer Axe parallel gehen, denn die Würfelkanten bezeichnen die Richtungen der Axen. Durch diese drei Kantenrichtungen werden wir weiter auf die ungefähre Lage des Oktaeders (o) geführt, gegen welche die Flächen l und g symmetrisch liegen. Würde die Oktaederfläche o die l schneiden, so würde Kante o/l der Kante h/l parallel gehen, also $h\,o\,l$ in einer Zone liegen, zwischen Oktaeder- und Würfelfläche liegen aber nur Leucitoidflächen, daher mufs l einem Leucitoide angehören. Nehmen wir nun an, dafs dieses Leucitoid den Ausdruck $\overline{|a : a : \frac{1}{2} a|}$ habe, also Leucitoeder sei, so wird der Ausdruck von π folgen. Denn Fläche π, die in der Würfelkantenzone liegend nothwendig einem Pyramidenwürfel angehören mufs, stumpft zu gleicher Zeit die gebrochene Ok-

taederkante des Leucitoeders l ab (siehe Zone $l\gamma\pi\gamma l$; es mufs die gebrochene Oktaederkante sein, weil kein Pyramidenwürfel die gebrochene Würfelkante abstumpfen kann), daraus folgt $\pi = \overline{|a:2a:\infty a|}$, es ist also die gewöhnliche Pyritoederfläche. Daraus folgt dann weiter die γ, sie mufs einem 48flächner angehören, da sie sonst in die Oktaeder- oder Würfelkantenzone fallen müfste. Die γ schärfen die gebrochenen Oktaederkanten des Leucitoeders zu, denn sie liegen zu jeder Seite von π zwischen l und π, daraus ergibt sich der Ausdruck $\overline{|a:2a:xa|}$, worin das x noch zu bestimmen ist. Das x bestimmt sich aus der zweiten Zone, da jedes γ je zweien gebrochenen Oktaederkanten des Leucitoeders parallel liegt, hier mufs man nur vorsichtig die einzelnen Kanten nicht verwechseln. Nehmen wir nemlich am vordern h die beiden obern γ zwischen l/π und l/π gelegen und vergleichen die l mit dem Leucitoeder Fig. 4, so geht ihre gemeinsame gebrochene Oktaederkante von c nach $2a$. Das rechte der beiden γ fällt aber zugleich noch in die gemeinsame Kante der beiden vom vordern h links gelegenen l/l (zwischen denen ebenfalls Flächen $\gamma\pi\gamma$ liegen), deren Kante von a nach $2b$ geht, ziehen wir daher dieser Linie in der Projektionsebene eine durch $2a$ parallel, so wird durch selbige die Axe b unter $4b$ geschnitten, so dafs

$$\gamma = \overline{|c:2a:4b|} = \overline{|\tfrac{1}{4}c:\tfrac{1}{2}a:b|} = \overline{|\tfrac{1}{4}a:\tfrac{1}{2}a:a|},$$

ein 48flächner, welcher sich öfter beim Schwefelkiese findet. Zu gleicher Zeit sieht man hier recht deutlich ein, warum der 48flächner, der die Kanten l/π abstumpft, nur zur Hälfte auftreten kann. Die Fläche g liegt ebenfalls in der gebrochenen Oktaederkante des Leucitoeders, hat also den Ausdruck $\overline{|a:2a:xa|}$, zu gleicher Zeit würden sie aber, bei gehöriger Verlängerung in die Zone der Kante o/π fallen. Den Kantenzonenpunkt o/π haben wir auf Fig.

28. gezeichnet, ziehen wir durch diesen eine Linie der $\overline{|a : 2b|}$ parallel, so erhalten wir die Linie $g = \overline{|\frac{3}{2}a : 3b|}$, folglich die Fläche

$$g = \overline{|\tfrac{3}{2}a : 3b : c|} = \overline{|\tfrac{1}{2}a : a : \tfrac{1}{3}a|}.$$

Die Pentagondodekaederfläcke p stumpft an diesem die gebrochene Oktaederkante $\overline{|\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|}$ ab, folglich ist

$$p = \overline{|\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a : \infty a|} = \overline{|a : \tfrac{3}{2}a : \infty a|}.$$

Wollten wir noch weiter untersuchen, wie andere Flächenausdrücke an unserm Krystalle erscheinen müfsten, so dürfen wir nur die dem Ausdrucke zugehörige Fläche in die allgemeine Figur Tab. I. einzeichnen. Namentlich kommt an unserm Krystalle noch der Hälftflächner von $\overline{|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a|}$ vor, der dem 48flächner γ Tab. I. entspricht. Verfolgen wir eine Sektionslinie desselben, z. B. $\overline{|\frac{5}{3}a : 5b|}$, so liegt diese in dem Zonenpunkte $(b' + 2a)$, also in demselben, welchen π mit o in Fig. 28. macht, daher mufs die Fläche in die Zone von o über g nach π fallen. Zugleich sehen wir aber noch, dafs die γ zwischen der g und π liegt, sie mufs also die Kante von g und π und nicht die von g und o abstumpfen. Andere Zonen kann man zwar noch auf derselben Sektionslinie verfolgen, allein es wird kaum eine auf dem Krystalle sichtbar werden.

Die Deduktionskörper des viergliedrigen Oktaeders $\overline{|a : a : c|}$.

Das viergliedrige Oktaeder erhält den Axenausdruck $\overline{|a : a : c|}$, worin die beiden a die gleichen Seitenaxen bezeichnen, die c aber die von jenen a verschiedene Hauptaxe. Nach der Axe c wird das Oktaeder aufrecht gestellt. Die viergliedrigen Endkanten $\overline{|a : c|}$ liegen um die Axe c, die Seitenkanten $\overline{|a : a|}$ verbinden die Enden der Seitenaxen a.

Die Zonenverhältnisse sind wie im regulären Systeme, da die Zonen ganz allgemein gelten. Die physikalische Verschiedenheit der Flächen ergibt sich aus der Lage zu den Gliedern des Oktaeders, und da diese von den Axen abhängen, auch aus der Lage gegen die Axen*). Im §. 29. haben wir gesehen, dafs das Deduktionshexaid des viergliedrigen Systemes 2 und 1flächig werden müsse, wir folgerten es aus der Lage der Flächen gegen die Ecken. Die zwei Krystallräume, welche die 2 und 2kantigen unter sich gleichen Seitenecken abstumpfen, müssen ebenfalls unter sich physikalisch gleich sein, daher haben sie auch beide denselben Ausdruck $\overline{|a : \infty a : \infty c|}$ (Fig. 31. h), der nur 2 Krystallräume bezeichnen kann. Sie dehnen sich gewöhn-

---

*) Um den Grund für die physikalische Differenz der Flächen einzusehen, dürfen wir nur immer auf die Körper zurückgehen, aus welchen die Flächen deducirt sind. Diese Differenz folgt dann auch weiter aus den den Flächen untergelegten Axen. Und da jede letzte Bestimmung von den Axen abhängt, so haben wir auch schon in diesem Theile auf die Axen Rücksicht zu nehmen.

lich aus, und bilden eine *rechtwinklich vierseitige* (quadratische) Säule, auf deren Kanten die Oktaederflächen (o Fig. 31.) aufgesetzt sind. Die dritte Hexaidfläche, welche die gleichkantige Endecke des Oktaeders abstumpft, ist von den beiden ersten verschieden, und bildet zur quadratischen Säule die *Gradendfläche.* Sie erhält den Ausdruck $\overline{|c : \infty a : \infty a|}$, ein Zeichen, das nur einen einzigen Krystallraum andeuten kann, daher ist sie auch in ihrer Art, wie ihr Zeichen, einzig (wir können sie mit h' bezeichnen, um durch den Strich die Differenz von den beiden unter sich gleichbeschaffenen h anzudeuten, Fig. 14.).

Im viergliedrigen System ist also die Möglichkeit vorhanden, dafs ein einziger Krystallraum von allen sich unterscheidet, daher kann der viergliedrige Krystall einen einzigen blättrigen Bruch haben, beim regulären Systeme mufsten wenigstens drei sein, da die Hexaidflächen unter sich nicht different werden konnten.

Das Dodekaid zerlegte sich in 4+2 Krystallräume. Die 4 (d Fig. 32.) bekommen das Axenzeichen $\overline{|a : c : \infty a|}$, welches vierdeutig ist. Die beiden andern $d' = \overline{|a : a : \infty c|}$, das nur zwei Räume bezeichnen kann. Jene vier bilden ein Oktaeder, welches die gleichen Endkanten, diese zwei bilden eine rechtwinkliche vierseitige Säule, welche die gleichen Seitenkanten des Hauptoktaeders (o) abstumpft. Wir haben also *eine* Gradendfläche, zwei vierseitige Säulen und zwei Oktaeder. Die Gradendfläche stumpft die viergliedrige Endecke beider Oktaeder ab. Die Säule $\overline{|a : a : \infty c|}$ stumpft die Kanten der Säule $\overline{|a : \infty a : \infty c|}$ ab, wodurch wir eine achtseitige Säule bekommen, die aber gleichkantig ist. Man nennt die Säule $\overline{|a : a : \infty c|}$, welche die Kante des Hauptoktaeders abstumpft, die *erste Säule:* die Säule $\overline{|a : \infty a : \infty c|}$, welche die Ecke abstumpft, die

zweite Säule. Das Oktaeder $d = |\overline{a : c : \infty a}|$ heifst das *erste stumpfere Oktaeder* von $o = |\overline{a : a : c}|$. Geht man aber vom Oktaeder $d = |\overline{a : c : \infty a}|$ aus, so ist $o = |\overline{a : a : c}|$ davon das *erste schärfere Oktaeder.* Man sagt, das schärfere Oktaeder fällt in die Diagonalzone seines Hauptoktaeders, d. h. das Hauptoktaeder stumpft die Endkanten des schärfern Oktaeders ab.

Die 12 Krystallräume der Leucitoide (Fig. 33. Tab. V.) zerlegen sich in 8+4. Die 4 Krystallräume erhalten das Zeichen $l = |\overline{a : a : \frac{1}{2}c}|$, ein solches Zeichen ist vierdeutig, denn es liegt in jedem Oktanten eine Fläche desselben. Der daraus gebildete Körper mufs daher ein Oktaeder sein. Unter den Oktaederflächen l liegen in jedem Oktanten noch 2 Flächen $l' = |\overline{a : \frac{1}{2}a : c}|$, wodurch also 8 Krystallräume bezeichnet sind. Würden sich die l' ausdehnen, so bekämen wir den 4 und 4kantner (Fig. 60. Tab. IV.). Er erscheint wie ein Oktaeder, das nach seiner Diagonalfläche gebrochen ist. Niemals wird er selbstständig, sondern nur untergeordnet. Im Gleichgewicht hat er dreierlei Kanten: 1) die gebrochenen Grundkanten, welche die Axen a verbinden; 2) die Kanten, welche den Kanten des eingeschriebenen Oktaeders entsprechen, also die Axen a und c verbinden; 3) die Kanten, welche sich über den Flächen des eingeschriebenen Oktaeders erhebend vom Axenpunkte c ausstrahlen.

Acht gleichbeschaffene Krystallräume (l') ist das Maximum, was im viergliedrigen Systeme auftreten kann. Davon den Grund scharf einzusehen, macht sich der Anfänger nicht selten Schwierigkeiten. Er darf aber nur auf das Dodekaid des viergliedrigen Systemes, dessen Kanten durch das Leucitoid abgestumpft werden müssen, zurückgehen, so zeigt sich, dafs wenn das Dodekaid in Folge der

Beschaffenheit seines zugehörigen viergliedrigen Oktaeders 4+2flächig ($4d+2d'$ Fig. 32.) werden mufs, auch zweierlei Kanten in ihm vorhanden sein müssen, und zwar, wenn wir die parallelen nicht mitzählen:

1) vier unter sich gleiche Endkanten d/d;

2) acht im Zickzack liegende Seitenkanten d/d'.

Folglich zerlegen sich auch die diese Kanten abstumpfenden Leucitoidflächen des viergliedrigen Systems in $8l'+4l$, wie Fig. 33. zeigt. Was aber für ein Leucitoid gilt, gilt für alle, wie diefs der Zonenkonnexus der Tab. I. leicht lehrt.

Dasselbe folgt nun auch, und noch allgemeiner, aus der Betrachtung der zu Grunde liegenden Axen. Eine Fläche $l = \overline{|a : a : \frac{1}{2}c|}$ kann am viergliedrigen Axenkreuz aac, worin c von beiden gleichen a verschieden ist, nur vier Mal auftreten, d. h. ein viergliedriges Oktaeder bilden, in jedem Quadranten der Projektionsfigur liegt eine Sektionslinie. Hingegen die Fläche $l' = \overline{|\frac{1}{2}a : a : c|}$ kann in einem Quadranten zwei Mal gelegt werden; denn es bleibt derselbe Flächenausdruck, ob die eine a unter $\frac{1}{2}$ und die andere unter 1, oder ob die eine unter 1 und die andere unter $\frac{1}{2}$ geschnitten wird. Dadurch ergeben sich aber 8 gleiche Sektionslinien, folglich eben so viel zugehörige Krystallräume. Würden sich die 12 Krystallräume eines solchen Leucitoides zu einer selbstständigen Form ausdehnen (Fig. 33.), so müfsten die 4 Trapezoidflächen (l), so wie die 8 (l'), jede Gruppe untereinander, kongruent sein, wodurch auch schon die physikalische Beschaffenheit begründet ist. Im regulären Systeme (Fig. 4.) waren alle Räume gleich beschaffen, folglich die Trapezoidflächen einander kongruent.

Das Pyramidenoktaeder zerfällt ebenfalls in 8+4 zusammengehörige Krystallräume. Stellen wir es (Fig. 5. Tab. V.) nach irgend einer Axe (c) aufrecht, so liegt an der aufrechten Axe ein 4 und 4kantner $\overline{|c : a : 2a|}$. In der

Seitenkante liegen die 4 übrigen Krystallräume $|a : a : 2c|$, die für sich ein Oktaeder bilden. Es verhält sich also in Rücksicht auf die Lage der beiden Körper zu den Axen umgekehrt wie das Leucitoeder; bei letztern lag der 4+4 kantner an den Seitenkanten, das Oktaeder an der Endecke; beim Pyramidenoktaeder liegt der 4+4kantner an der Endecke, das Oktaeder aber an der Seitenkante.

Die Krystallräume des Pyramidenwürfels zerfallen in 4+4+4. Es folgt dieses aus dem Leucitoeder, wie aus den Axen. Das Zeichen $|a : \frac{1}{2}c : \infty a|$ enthält vier Krystallräume; ebenso das Zeichen $|c : \frac{1}{2}a : \infty a|$, beide bezeichnen ein Oktaeder. Das Zeichen $|a : \frac{1}{2}a : \infty c|$ enthält zwar auch vier Krystallräume, allein sie gehen alle der Axe c parallel, schliefsen demnach eine achtseitige Säule ein, die zugleich 4 und 4kantig ist, vier Kanten liegen in den Enden der Axen, vier zwischen den Axen.

Dieses weiter einzusehen, darf man nur den Pyramidenwürfel nach einer Axe aufrecht stellen (nach c Fig. 6.), so bilden die vier der aufrechten Axe parallel liegenden Krystallräume eine 4 und 4kantige Säule, auf die 4 Kanten in den Enden der Axen ist ein Oktaeder aufgesetzt, über welchem noch ein zweites liegt. Tragen wir diefs auf das Leucitoeder über, an welchem der Pyramidenwürfel die gebrochenen Oktaederkanten abstumpft, so müssen die Abstumpfungsflächen der 4 gebrochenen Oktaederkanten (l/l Fig. 33) um die Axe c gelagert das eine Oktaeder; die 4 Abstumpfungsflächen der Kanten (l'/l') darunter das zweite; endlich die 4 Krystallräume, welche die Seitenkanten (l'/l') abstumpfen, die 4+4kantige Säule bilden. Die 3 Kantengruppen sind unter sich verschieden, folglich auch die ihnen zugehörigen Flächengruppen.

Der 48flächner zerlegt sich endlich in 8+8+8 Krystallräume, also in dreierlei 4 und 4kantner: $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}c|$,

$\overline{\underline{|a : \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}c|}}$ und $\overline{\underline{|\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a : c|}}$. Es folgt diefs schon aus dem Dodekaide des viergliedrigen Systemes, an welchem unser 48flächner die Kanten zuschärft. Die 4 Endkanten der Flächen d werden zugeschärft durch 8 gleichwerthige Krystallräume. Die 8 Kanten zwischen d' und d können nicht durch 16 gleichwerthige Krystallräume zugeschärft werden, sondern die Zuschärfungsflächen, welche auf der Seite der d liegen, sind anderwerthig als die auf der Seite der d', daher müssen sich diese Zuschärfungsflächen in 8+8 zerlegen. Stellen wir den 48flächner nach einer Axe (Fig. 7.) aufrecht, so ist um die Endecke ein 4+4kantner gelagert. Diejenigen 8 Flächen, welche die 8 Basen (h) jener 8 Dreiecke begränzen, bilden einen zweiten, endlich bilden die übrigen 8 über den gebrochenen Seitenkanten des 48flächner den dritten 4 und 4kantner.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich, dafs im viergliedrigen Systeme höchstens nur 8 Krystallräume gleichwerthig auftreten können. Sie können die Axe c beliebig schneiden, die Axen a schneiden sie aber alle in der Ungleichheit. Daher bekommen sie den allgemeinen Axenausdruck $\overline{\underline{\left| c : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a \right|}}$, wo m und n jede ganze oder gebrochene Zahl bedeuten, nur darf m niemals gleich n werden.

Aufser diesen sind die Oktaeder von Wichtigkeit, sie zerfallen in zwei Reihen:

1) in solche, deren Flächen alle drei Axen schneiden: $\overline{\underline{\left| c : \frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a \right|}}$;

2) in solche, deren Flächen zwei Axen schneiden, der dritten aber parallel gehen: $\overline{\underline{\left| c : \frac{1}{m}a : \infty a \right|}}$.

Nimmt man ein (aus Federn gebundenes) Axenkreuz zur Hand, so wird man sich bald überzeugen, dafs jedes der

beiden Zeichen 4 Krystallräume bezeichnet, die unter sich gleichwerthig sind. Gewöhnlich nennt man die Oktaeder *sub* 1. *Oktaeder der ersten Ordnung*, die *sub* 2. *Oktaeder der zweiten Ordnung*, die Flächen der einen Ordnung liegen wie die Kanten der andern Ordnung, und umgekehrt. Beginnt man z. B. mit dem Hauptoktaeder $\overline{|a : a : c|} = o$, dem Oktaeder erster Ordnung, so stumpft das erste stumpfere Oktaeder dessen Kanten ab, und erhält den Ausdruck $\overline{|a : c : \infty a|} = d$, es ist das Oktaeder des Granatoeders, und zweiter Ordnung, seine Flächen liegen wie die Kanten des erstern. Stumpft man die Endkanten des letztern Oktaeders wieder ab, so kommt das Oktaeder des Leucitoeders $\overline{|c : 2a : 2a|} = l$, seine Flächen liegen über den Flächen des Oktaeders 1ster Ordnung $\overline{|a : a : c|}$, aber über den Kanten des Oktaeders 2ter Ordnung $\overline{|a : c : \infty a|}$, es gehört daher zu den Oktaedern 1ster Ordnung, man nennt es auch das zweite *stumpfere Oktaeder*, weil es durch eine abermalige Abstumpfung entstanden ist. So spricht man weiter von einem dritten stumpfern, welches den Ausdruck $\overline{|c : 2a : \infty a|}$ erhält, also das Oktaeder des Pyramidenwürfels ist, es ist ein Oktaeder 2ter Ordnung, wie schon aus dem Zeichen folgt. Ein Blick auf Tab. I. macht diese Verhältnisse sogleich klar. Man kann diese Abstumpfungen bis ins Unendliche fortsetzen. Projiciren wir uns diese 4 Oktaeder auf die gemeinsame Gradendfläche $\overline{|c : \infty a : \infty a|}$, und gehen nun im Gedanken von einem andern Oktaeder aus, z. B. von $\overline{|c : 2a : 2a|}$, so würde $\overline{|c : 2a : \infty a|}$ das erste stumpfere bilden, während $\overline{|a : c : \infty a|}$ das erste schärfere ist, was in die Diagonalzone von $\overline{|c : 2a : 2a|}$ fällt. Man kann daher von jedem

Oktaeder aus sich eine Reihe stumpferer oder schärferer Oktaeder denken und deduciren, die alle aus einem entstehen. Die Oktaeder mit ungerader Zahl (3tes und 1stes stumpfere, 1stes und 3tes schärfere . .) gehören alle einer Ordnung an, die mit gerader der andern. Es versteht sich dann auch weiter, daſs man von dem Axenzeichen ganz absehen, und der Oktaederreihe ganz andere Axen unterlegen kann.

Die 8seitigen Säulen haben den Ausdruck $\overline{\underline{|a : \frac{1}{m}a : \infty c|}}$, es sind deren eine unendliche Anzahl denkbar, sie alle gehen der c parallel, liegen also in der Zone der Hauptaxe.

Vierseitige Säulen gibt es zwei:

$$\overline{\underline{|a : \infty a : \infty c|}} \text{ und } \overline{\underline{|a : a : \infty c|}}.$$

Wie das Zeichen sagt, so gehört die $\overline{\underline{|a : a : \infty c|}}$ dem Dodekaide an, sie liegt wie die Kanten des Hauptoktaeders, kann daher als ein Oktaeder 1ster Ordnung betrachtet werden, dessen Hauptaxe aber unendlich lang geworden ist. Aus diesem Grunde wird sie die *erste Säule* genannt. Alle Flächen der Oktaeder 1ster Ordnung sind auf ihre Flächen, der Oktaeder 2ter Ordnung auf ihre Kanten gerade aufgesetzt. Die Säule $\overline{\underline{|a : \infty a : \infty c|}}$ gehört den Hexaidflächen an, stumpft also die Ecken des Hauptoktaeders ab, so daſs sich die Oktaederkanten über den Flächen erheben, folglich auch die Oktaeder 2ter Ordnung sich mit ihren Flächen auf die Flächen der Säule stellen. Demnach kann man diese Säule als ein Oktaeder 2ter Ordnung ansehen, dessen Hauptaxe c unendlich lang geworden, weshalb sie *zweite Säule* genannt ist. Die Oktaeder 2ter Ordnung verhalten sich zur zweiten quadratischen Säule, wie sich die Oktaeder 1ster Ordnung zur ersten verhalten. Daſs die beiden Säulen gegenseitig ihre Kanten abstumpfen, leuchtet aus der Projektion ein, es entsteht dann eine

achtseitig gleichkantige Säule. Diese 8 gleichen Kanten abzustumpfen, ist eine neue achtseitige Säule nothwendig, die aber stets 4 und 4kantig wird. Daraus folgt weiter, dafs neben den beiden vierseitigen Säulen nur die achtseitige noch bestehen kann, welche die Kanten der vierseitigen zuschärft.

Ueber die Gradendfläche $\overline{\underline{|c : \infty a : \infty a|}}$ läfst sich nichts hinzufügen, als dafs sie einzig ist, und die Endecke aller Oktaeder und 4 und 4kantner zugleich gerade abstumpft.

Hemiedrie des viergliedrigen Systemes.

Theoretisch kann auf jedes von 4 physikalisch gleichen Krystallräumen gebildete Oktaeder dasselbe Princip der Hemiedrie angewendet werden, welches wir auf das reguläre Oktaeder bereits (pag. 190) angewendet haben. Folglich auch auf die viergliedrigen Oktaeder. Lassen wir also eine Fläche desselben wachsen, während die 3 angränzenden ausfallen etc., so bekommen wir ein Tetraid (viergliedriges Tetraeder), die 4 versteckten Kanten, welche den 4 Endkanten parallel gehen, bleiben unter sich gleich, allein die 2 den Seitenkanten parallel gehenden versteckten Kanten bleiben zwar unter sich gleich, sind aber von jenen 4 verschieden; in ihrer Bewegung würden sich diese beiden gleichen unter rechten Winkeln kreuzen. Es folgt aus den 4+2 Kanten, dafs die Dreiecke der Tetraide gleichschenklich sind, und die Ecken 2+1kantig. Wollten wir nun weitere Folgerungen ziehen, so müfsten alle Oktaeder derselben Ordnung ebenfalls in derselben Weise hemiedrisch erscheinen, weil sie vermöge ihrer Lage die 2 gleichen Kanten des Tetraides zuschärfen, die Oktaeder der nicht zugehörigen Ordnung aber vollflächig, denn sie schärfen die 4 unter sich gleichen Tetraidecken zweiflächig zu (sie liegen ja zwischen der gewachsenen und verschwundenen Hauptoktaederfläche). Oder man kann

auch sagen, da die Oktaeder der zweiten Ordnung aus dem Granatoeder und den Pyramidenwürfeln gefolgert sind, so müssen sie, wie diese Körper im regulären Systeme, an den geneigtflächig hemiedrischen Körpern vollflächig auftraten, ebenfalls vollständig auftreten. Die vier- und achtseitigen Säulen nebst der Gradendfläche verhalten sich wie im vollflächigen Systeme. Nur der 4 und 4kantner wird noch hemiedrisch. Man kann jedem 4 und 4kantner ein Oktaeder einschreiben, so daſs über jeder Fläche des eingeschriebenen Oktaeders ein Flächenpaar des 4 und 4kantners liegt (Tab. IV. Fig. 60.). Wird nun das eingeschriebene Oktaeder hemiedrisch, so werden auch die über den wachsenden Flächen liegenden Paare des 4 und 4kantners zugleich wachsen, während die über den verschwindenden verschwinden. Es verhält sich der 4 und 4kantner zu seinem eingeschriebenen Oktaeder, wie im regulären Systeme das Leucitoid, Pyramidenoktaeder und 48flächner sich zu ihren eingeschriebenen Oktaedern verhielten.

So einfach sich jedoch das analoge Gesetz ableiten läſst, so sind dennoch diese Regeln bis jetzt nicht genau durch unmittelbare Beobachtung bestätigt. Der Kupferkies ist das einzige System, was hierzu die Belege liefern müſste. Allein das Kupferkiestetraeder nähert sich so sehr dem regulären, daſs noch mancher gewichtige Zweifel erhoben werden kann, ob der Kupferkies wirklich viergliedrig sei. Der ganze Typus, namentlich auch die Zwillingsgesetze, sind wie im regulären Systeme. Der Edingtonit, als zweites hierhergehöriges Beispiel ist mir unbekannt.

Der 4 *und* 4*kantner* ist der allgemeinste Körper im 4-gliedrigen System. Da er von Dreiecken begränzt ist, so läſst sich auch auf ihn das Princip der Hemiedrie (pag. 190) anwenden. Bezeichnet man (Fig. 61. Tab. IV.) eine Fläche mit 1, die drei anliegenden mit 0, und fährt fort, so finden sich um jedes weiſse 0 drei gestreifte 1, und um jedes gestreifte 1 drei weiſse 0 gelagert; läſst man die ei-

nen wachsen, während die andern verschwinden, so kommt ein geneigtflächig hemiedrischer Körper, dessen Seitenkanten im Zickzack laufen. Dächten wir uns diesen Körper an einem viergliedrigen Krystalle auftreten (z. B. am Scapolithe), so würden von den 12 gleichwerthigen Kanten (h/o Fig. 37. Tab. V.) des Krystalls nur die Hälfte abgestumpft werden, während die andere Hälfte nicht abgestumpft erschiene, nemlich die l' würden erscheinen, während die l^0 verschwänden, und umgekehrt. Zu gleicher Zeit finden wir noch, dafs die Abstumpfungsflächen l' oder l^0 gegen die Lage der Säulenkante h/h verglichen, alle nach einer Seite liegen, niemals liegen zwei wachsende Flächen l' am obern und untern Ende von h an ein und derselben Seite, sondern da das obere l' auf der rechten Seite liegt, liegt das untere auf der linken, umgekehrt bei l^0, welche oben auf der linken und unten auf der rechten liegt, und so für alle übrigen l^0 und l' des Krystalles. Würden wir nun auch den untern Axenpunkt von c nach oben kehren, also den Krystall umdrehen, so würde dennoch oben das l', welches jetzt unten auf der linken Seite der Säulenkante h/h liegt, auf die rechte Seite fallen, und das untere auf die linke, mit einem Worte, in jeder Hauptstellung des Krystalles liegt am obern Ende der Säulenkante h/h das l' auf der rechten, diefs sind die rechts gedrehten, das l^0 aber auf der linken, die links gedrehten Krystalle, eine Erscheinung, die wir noch beim sechsgliedrigen Systeme (Quarz, Apatit) genauer kennen lernen werden. Bis jetzt ist diese Hemiedrie nur beim Scapolith und Anatas vermuthet. Wir erhalten auf diese Weise eine geneigtflächige Hemiedrie, denn von den 0 und von den a geht kein Paar unter sich parallel, sondern die wachsenden 1 liegen den verschwindenden 0 respektive parallel.

Diese geneigtflächige Hemiedrie ist jedoch von der tetraedrischen ganz verschieden. Wollten wir den 4+4kantner nach dem tetraedrischen Gesetze behandeln, so wür-

den wir (wie auf Tab. IV. Fig. 60.) über den abwechselnden Oktanten je zwei Flächen wachsen, und drei Mal je zwei anliegende etc. verschwinden lassen müssen. Diefs gäbe aber einen ganz andern Körper (ein gebrochenes Tetraid).

Endlich bleibt noch eine dritte Möglichkeit übrig, die in Tab. IV. Fig. 62. dargestellt ist. Nach diesem Gesetze liegen zwei wachsende 1, so wie zwei wachsende 0 mit ihrer Basis aneinander. Die einfache Folge davon ist, dafs jetzt sowohl den 1 als auch den 0 eine Parallele entspricht. Lassen wir daher die 0 verschwinden, so entsteht durch die wachsenden 1 ein neuer Körper mit 4 Krystallräumen, die sich in 6 Zonen schneiden, also ein Oktaid bilden. Dieses Oktaid ist aber nicht 4gliedrig, sondern 2 und 2gliedrig, also ein Oktaid, was streng genommen dem 4gliedrigen Systeme nicht angehören kann. Zum Unterschiede von der geneigtflächigen Hemiedrie in Fig. 61. nennt man diese auch wohl die *parallelflächige*. Dieses näher einzusehen, projicire man sich in Fig. 38. Tab. V. einen 4 und 4kantner, dessen Sektionslinien das allgemeine Zeichen $\overline{|a:2a|}$ (d. h. $a:2b$, $b:2a$ etc.) erhalten mögen. Die 4 Sektionslinien desselben mit dem Zeichen 1, und die andern mit dem Zeichen 0 schneiden sich unter einem 4 und 4winklichen Achteck, dessen 8 Eckpunkte abwechselnd den 4+4 Endkanten des 4 und 4kantner entsprechen. Zeichnen wir in den 4 und 4kanter das eingeschriebene Oktaeder ein, so sind dessen Sektionslinien $\overline{|a:a|}$ ($a:b$ und $b:a$). Das nächste stumpfere Oktaeder hat die Sektionslinien $\overline{|a:\infty a|}$ ($a:\infty b$ und $b:\infty a$). Aufser diesen beiden Oktaedern $\overline{|c:a:a|}$ und $\overline{|c:a:\infty a|}$ kam im 4gliedrigen Systeme aber kein Oktaeder mehr vor, dessen Sektionslinien eine andere Richtung gehabt hätten, als die Richtung jener beiden, d. h. die Oktaeder der 1sten Ordnung

hatten Sektionslinien der Linie $\overline{\underline{|a : a|}}$ ($a : b$ und $a : b'$), die 2ter Ordnung Sektionslinien der Linie $\overline{\underline{|a : \infty a|}}$ ($a : \infty b$ und $b : \infty a$) parallel. Der Grund davon liegt in der Deduktion, weil durch fortgesetzte Deduktion niemals ein anderes 4gliedriges Oktaeder erzeugt werden kann, als zu diesen beiden Systemen gehörig. Denken wir uns nun nach Vorschrift der Fig. 62. Tab. IV. vier Flächen (z. B. die 1) wachsen, so entsteht dadurch ein Oktaeder mit einer rhombischen Basis $b2b'2$, die Seitenkanten ($b : 2a$) sind unter sich gleich, ebenso die vordern Endkanten ($2a : c$) und die seitlichen ($b : c$); aber alle drei Kantensysteme unter sich verschieden. Dieses scheinbar 2 und 2gliedrige Oktaeder unterscheidet sich aber dadurch von dem wahrhaften, daſs von den 3 Axen a, b und c die beiden Seitenaxen a und b unter sich ein rationales Verhältniſs haben $a = \frac{1}{2}b$ oder $b = 2a$. Bei den wahrhaft 2 und 2gliedrigen Oktaedern stehen aber stets alle 3 Axen in einem irrationalen Verhältniſs, d. h. wenn man eine derselben $= 1$ setzt, so sind die übrigen irrationale Wurzelgröſsen, was schon von den Axen c und a des 4gliedrigen Systemes gilt. Wie wir daher im 4gliedrigen Systeme scheinbar 2 und 2gliedrige Oktaeder auftreten sehen, so sehen wir auch im gleichgliedrigen scheinbar 4gliedrige, es sind dieses Glieder, durch welche die einzelnen Systeme theilweis enger mit einander verwandt werden.

Unser scheinbar 2 und 2gliedriges Oktaeder nennt man auch wohl das *Oktaeder der Zwischenstellung*, weil seine Sektionslinie zwischen den Sektionslinien der Oktaeder jener beiden Ordnungen liegt. Daſs es auch hier ein rechtes und linkes Oktaeder gibt, leuchtet unmittelbar aus der Figur ein. Nur wenige Systeme sind bis jetzt bekannt, bei welchen ein solches Zwischenoktaeder beobachtet ist, und bei diesen wenigen tritt die Hemiedrie auch nicht immer mit Entschiedenheit hervor. Als Hauptbeispiel kann

der *Tungstein* gelten und vielleicht auch die ihm verwandten, das *Gelbbleierz* und *Scheelbleierz*; auch *Humboldtilith* und *Fergusonit* werden hier noch hingezählt. Treten die hemiedrischen Flächen untergeordnet am Krystalle auf, so entsteht nicht etwa eine Drehung, wie in Fig. 61. Tab. IV., sondern wenn die Flächen l (Fig. 37. Tab. V.) auf der linken Seite der Säulenkante h/h unten und oben vorhanden sind, so fehlen sie unten und oben auf der rechten Seite und umgekehrt (wächst also Fig. 37. oben l^0, so wächst unten nicht etwa l^0, sondern l').

Beispiel zum viergliedrigen Systeme.

Vesuvian.

Die Entwicklung der einzelnen Flächen bleibt in allen Systemen streng genommen dieselbe, daher liefern alle Beispiele nur eine Wiederholung der schon gegebenen Regeln. Wenn man ein Beispiel in einem Systeme gründlich versteht, versteht man alle Krystallspecies desselben Systems. Auf die Länge der Axen und folglich auch auf die Gröſse der Winkel kommt dabei nichts an, daher kann man zur Darstellung eines Systemes jede 4gliedrige Figur benutzen, wenn es uns nur um das Auffassen des Flächenzusammenhanges zu thun ist. Der Vesuvian erscheint meist mit ziemlich vorherrschenden Oktaederflächen $\overline{|a : a : c|}$ $= o$. Denkt man sich die 4 Krystallräume dieses Oktaeders im Gleichgewicht, so ist die Axe c kürzer, als die unter sich gleichen Axen a. Daher sind die Seitenkanten dieses Oktaeders schärfer, als die 4 Endkanten, der umgekehrte Fall würde stattfinden, wenn die c länger wäre als die a. Das Oktaeder erscheint jedoch fast niemals selbstständig, sondern es gesellt sich zu ihm die rechtwinklich

vierseitige Säule $\overline{|a : a : \infty c|} = d'$ (Fig. 39. Tab. V.), welche die Seitenkanten des Oktaeders abstumpfen mufs. Da dem Ausdrucke nur zwei Krystallräume angehören können, so müssen sie unter sich physikalisch gleich sein. Es entspricht ihnen ein deutlich beobachtbarer Blätterbruch. Da die d' unter den o liegen, also die o auf die d' gerade aufgesetzt sind, so gehören die Säulenflächen mit dem Oktaeder zur 1sten Ordnung, d. h. die Sektionslinien von o und d' gehen auf der Projektionsebene respektive einander parallel, die d' bilden demnach die erste rechtwinklich vierseitige Säule. Zu ihr tritt gewöhnlich noch die zweite Säule $h = \overline{|a : \infty a : \infty c|}$ (Fig. 32.), sie stumpft die Kante der ersten ab, h und d' bilden also eine gleichwinkliche achtseitige Säule. Das Zeichen von h ist zweideutig, daher sind auch die beiden Krystallräume unter sich physikalisch gleich, und ihnen entspricht gleichfalls ein blättriger Bruch, der zwar nur wenig, aber doch von dem Blätterbruch der d' verschieden ist. Dehnen sich die h so aus, dafs die d' verdrängt werden, so bilden sie mit o (Fig. 31.) einen Körper, dessen Flächen denselben Zonenzusammenhang, wie das Granatoder, zeigen. Beim Zirkon kommt diese zweite Säule h mit der auf die Säulenkante gerade aufgesetzten Oktaederfläche o (Fig. 31.) sehr schön selbstständig vor, beim Vesuvian wohl selten; hier findet sich mehr die erste Säule d' mit der auf die Säulenfläche gerade aufgesetzten Oktaederfläche o (Fig. 39.). Daran fehlt aber selten die Gradendfläche $h = \overline{|c : \infty a : \infty a|}$ (Fig. 14.), derjenige Krystallraum, welcher von allen nur Ein Mal auftritt, weil sein Zeichen eindeutig ist, und die 4kantige Endecke am Oktaeder sich nur Ein Mal findet. Diese Gradendfläche dehnt sich häufig stark aus, und bildet dann mit der ersten oder mit der zweiten Säule einen 2 und 1flächigen Würfel, ein Krystall, der zwar rechtwinklich ist, aber nicht Würfel genannt werden darf, da der Begriff Würfel

drei gleiche Krystallräume voraussetzt. Endlich findet sich auch noch das erste stumpfe Oktaeder $d = \overline{|a : c : \infty a|}$ (Fig. 32.), das die 4 gleichen Endkanten des Oktaeders abstumpft, wie die Parallelität der Kanten von o über d nach o zeigt. Die Flächen o, h, h', d und d' bilden daher das viel erwähnte drei Körpersystem des ersten Abschnitts (A): Oktaid, Hexaid und Dodekaid, zeigen demnach auch denselben Zonenkonnexus. Die besondere Beschaffenheit der einzelnen Krystallräumengruppen hängt aber von dem 4gliedrigen Oktaide ab. Diesen Zonenzusammenhang werden wir bei allen künftigen Systemen wieder finden, so dafs von dem Verständnifs desselben fast das Verständnifs der ganzen Krystallographie abhängt. Den Zusammenhang zwischen o und d (Fig. 32.) mufs der Anfänger sich besonders bemühen, genau einzusehen, d heifst das nächste stumpfere Oktaeder von o, wenn wir von o ausgehen (o als das die Axen bestimmende Oktaeder annehmen), hingegen wird o das erste schärfere, wenn wir vom Oktaeder d ausgehen, man sagt, die Oktaederfläche o falle in die Diagonalzone von d. Gäben wir dem d die Axen $\overline{|a : a : c|}$, so erhielte o den Ausdruck $\overline{|c : \frac{1}{2}a : \infty a|}$, denn wir dürfen beide nur projiciren, um sogleich einzusehen, dafs nur unter der Voraussetzung dieser Zeichen der beobachtete Flächenzusammenhang stattfinden kann. Würden wir die zweite Säule h und das Oktaeder o sich ausdehnen lassen, so bekommen wir denselben Zonenzusammenhang, als wenn wir die erste Säule d' und das erste stumpfere Oktaeder d wachsen lassen. Abgesehen von den verschiedenen Winkeln in beiden Figuren, unterscheiden sich diese gleichzonigen Körper noch durch ihre Deduktion. Das von h und o gebildete ist uns durch die Verbindung zweier Hexaidflächen mit dem Hauptoktaide entstanden, hingegen das von d und d' gebildete ist ein wahrhaftes Deduktionsdodekaid. Alle Gesetze, die wir beim regulären

Systeme entwickelt haben, gelten auch noch hier. Wir können z. B. das Hexaid *hhh'* uns ausgedehnt denken, und die drei Richtungen desselben zu Axen nehmen, das Oktaeder *o* wird dann die zwei unter sich gleichen 2+1flächigen Ecken abstumpfen müssen (Fig. 14.). Beim regulären Systeme war die Abstumpfung der Würfelecken durch das Oktaeder so, daſs von den drei Kanten der Würfelecke gleiche Stücke weggenommen wurden, weil die drei Axen gleich waren, daher war das kleine Dreieck der Abstumpfungsfläche *o*, so lange es nur von den Würfelflächen begränzt wurde, ein gleichseitiges. Beim 4gliedrigen Systeme wird dieses Dreieck, wie die Dreiecke des Hauptoktaeders, ein gleichschenkliches, weil jetzt die Fläche *o* zwei Kanten in der Gleichheit die dritte aber in der Ungleichheit schneiden muſs, und zwar werden die drei Axenlängen genau den drei abgeschnittenen Kantenlängen proportional sein müssen, das Dreieck *o* (Fig. 14.) also dem Dreiecke des Hauptoktaeders ähnlich sein. Beim Vesuvian zeigt sich dieses Verhältniſs nicht häufig, desto deutlicher aber beim Ichthyophthalm. Die Dodekaidflächen (*d* und *d'*) werden die Kanten des 2 und 1flächigen Hexaides abstumpfen, indem die Abstumpfungsflächen einer Kante parallel gehen, die übrigen beiden Kanten aber in dem Verhältniſs von $a:c$ schneiden. Würde man die Dodekaidflächen ins Gleichgewicht treten lassen, so würden die 4*d* unter sich kongruente Rhomben bilden, die 2*d'* ebenfalls, allein die Rhomben *d* wären von den Rhomben *d'* verschieden, so daſs der physikalische Unterschied der *d* auch mathematisch begründet ist. Zu der gleichkantigen achtseitigen Säule (*h* und *d'* Fig. 32.) treten ferner Abstumpfungsflächen *p* (Fig. 35); da alle 8 Kanten unter sich gleich von gleichwerthigen Krystallräumen gebildet werden, so müssen die *p* acht Mal in der Säule auftreten, also 4 Krystallräume einschlieſsen, es entsteht dadurch eine 4 und 4kantige Säule, indem die ausgedehnten *p* über *d'*

eine andere Kante bilden, als über h. Der Ausdruck dieser Fläche ist nicht in allen Krystallen durch Zonenkonnexus zu finden; dafs die Fläche das Zeichen ∞c habe, folgt aus der Säulenzone, in die sie fällt. Es bilden nun zwar aufser der Säulenzone das oben und unten anliegende λ mit p noch eine Zone, allein da λ noch nicht bestimmt ist, so mufs entweder p oder λ durch eine Winkelmessung gefunden sein. Aus der Winkelmessung ergibt sich, dafs $p = \overline{\underline{|a : \tfrac{1}{3}a : \infty c|}}$ wird, eine dem niedrigen Pyramidenwürfel $\overline{\underline{|a : \tfrac{1}{3}a : \infty a|}}$ analoge Fläche ist. Durch die Schnitte der p mit den h und d' entstehen 8+8 neue Kanten, die neuen Säulen, welche durch Abstumpfung dieser Kanten entstehen, können daher ebenfalls nur achtseitig sein. Häufig kommt noch die Abstumpfung der 8 Kanten d'/p durch π (Fig. 36.) vor; auch der Ausdruck dieser Fläche läfst sich nicht genau durch Zonen finden, wiewohl π mit den anliegenden γ in einem Zonenzusammenhange steht. Allein da wir die Ausdrücke von p und d' kennen, und π beider Kanten abstumpft, also ihre Sektionslinie auf der Projektion zwischen den Sektionslinien jener beiden liegen mufs, so lassen sich die Gränzen genau bestimmen, über welche π nicht hinaus gehen kann. Wir werden weiter unten sehen, dafs durch p die Axe a nach der Seite der h hin in $\tfrac{1}{3}a$, nach der Seite der d' hin in $1a$ geschnitten wird. Projiciren wir uns dieses Verhältnifs für drei anliegende hp und d', so geht hervor, dafs die π die Axe a nach h hin unter einem gröfsern Verhältnifs, als $\tfrac{1}{3}$, und unter einem kleinern als 1 trifft, weil die d' nach h hin die Axe unter der Einheit schneidet; die gesuchte Axenlänge wird alfo zwischen $\tfrac{1}{3}$ und $\tfrac{1}{1}$ liegen, also wahrscheinlich $\tfrac{1}{2}$ sein, so dafs $\pi = \overline{\underline{|a : \tfrac{1}{2}a : \infty c|}}$. Dehnen sich diese Säulenflächen, deren wir jetzt $4d' + 4h + 8p + 8\pi = 24$ haben, alle gleichmäfsig aus, wie es nicht selten der Fall ist, und treten aufserdem noch andere Seitenflächen hinzu, so bekommt

die Säule einen gerundeten cylindrischen Umrifs mit langen, der Axe c parallellaufenden Streifen, ein treffliches Kennzeichen für 4gliedrige (auch 6gliedrige) Systeme.

Gehen wir jetzt von der Säule zu den Endflächen über, so fallen zunächst in der Endkantenzone des Oktaeders o (Fig. 36.) drei Flächen l, λ und x auf, sie alle müssen, wie die Endkante des Oktaeders von a nach c gehen. Würde das links vom vordern t gelegene l die unter t gelegene d' schneiden, so würde von d' über l, g nach d eine Zone hervortreten. Da d' und d Dodekaidflächen sind, so ist diefs die Kantenzone des Dodekaides, mithin ist l der Leucitoederfläche analog, erhält also den Ausdruck $\overline{\underline{|a : c : \frac{1}{2}a|}}$ (man darf hierbei nur immer auf die im regulären Systeme entwickelten Zonenverhältnisse der gleichnamigen Flächen zurückgehen; siehe die gleiche Lage der Flächen in Fig. 4.). Solcher l sind 16 vorhanden, die 8 Krystallräume begränzen, weil zwischen d und d' 16 Kanten möglich sind. Die 4 übrigen Krystallräume, welche das 4gliedrige Leucitoeder vervollständigen würden, müfsten die Kante zwischen h' und o abstumpfen und zu gleicher Zeit auch mit zwei anliegenden d in eine Zone fallen, erhielten also den Ausdruck $\overline{\underline{|a : a : \frac{1}{2}c|}}$, sie erscheinen ungleich seltener. Dieses Oktaeder wäre das nächste stumpfere von d, und das zweite stumpfere von o, gehörte also mit o zu derselben Ordnung.

Aus der 4 und 4kantnerfläche l läfst sich weiter die Fläche π folgern, die wir oben nur annäherungsweise bestimmen konnten, denn wir sehen von l über das unterliegende γ nach $\pi\gamma$ und l eine Kantenparallelität; π stumpft also die Kante l/l ab, da aber π der Axe c parallel gehen mufs, vermöge der Säulenzone, in die sie fällt, so mufs sie nothwendig dem Pyramidenwürfel analog sein, also den Ausdruck $\overline{\underline{|a : \frac{1}{2}a : \infty c|}}$ erhalten. Man braucht, um solches

einzusehen, nur immer wieder auf die allgemeine Flächendeduktion Tab. I. zurückgehen, weil alle diese Verhältnisse nur eine Wiederholung des dort Gelehrten sind. (Beiläufig sehe man auch auf Fig. 4. und 33. Unsere Kante l/l entspricht z. B. der Seitenkante l'/l' in Fig. 33. . . .)

Die Flächen λ und x unter der l gehen, wie schon gesagt, ebenfalls von a nach c, die dritte Axe a müssen sie aber unter einem kleinern Verhältnifs als $\frac{1}{2}a$ schneiden, λ etwa $\frac{1}{3}a$, und x noch kleiner, also $\frac{1}{4}a$, so dafs $\lambda = \overline{|a : c : \frac{1}{3}a|}$ und $x = \overline{|a : c : \frac{1}{4}a|}$, weil diefs die nächst einfachsten Verhältnisse sind. Für λ bestätigt sich diese Vermuthung schon durch die Zone, welche von λ über p nach λ (Fig. 35.) geht. Denn die Kante λ/p geht der Kante parallel, unter welcher sowohl λ wie p die Gradendfläche h' schneiden würden. Denken wir uns daher die Flächen λ und p auf h' projicirt, so wird p durch den Mittelpunkt der Construktion gehen, aber so, dafs sie durch parallele Bewegung die Axen a stets unter dem Verhältnifs $1 : \frac{1}{3}$ schneidet; die Fläche λ aber müfste mit h' Kanten bilden, die der Kante h'/p parallel laufen, daher mufs auch ihre Sektionslinie der h'/p parallel gehen, also die Axen ebenso schneiden, als die bewegte p; λ ging nun von $a : c$, also schneidet sie die dritte Axe in $\frac{1}{3}a$. Man sagt in diesem Falle, λ sei gerade auf p aufgesetzt; so lange Axe c auf die Gradendfläche h' rechtwinklich steht, mufs dann immer die Kante λ/p mit der Säulenkante h/p einen rechten Winkel bilden, denn die Säulenkante h/p geht der Axe c parallel, und die Kante λ/p fällt in ihrer Bewegung mit der Projektionsebene h' zusammen. (Wenn λ/λ die Seitenkante eines Leucitoides ist, die $a : \frac{1}{3}a$ hat, p diese abstumpft, so folgt daraus der gegenseitige Zusammenhang der Flächen.) Was von der Lage der λ gegen p gilt, gilt ebenfalls von der Lage der l gegen π; l ist gerade aufgesetzt auf π, weil die Kante π/l (oder die ihr parallel y/π) mit π/p einen rechten Winkel macht.

Die Oktaederkantenzone ist eine der entwickeltsten Zonen des 4gliedrigen Systemes. Beginnen wir Fig. 36. mit dem rechten obern *d* unterhalb *h'*, so folgt links daneben zuerst die Oktaederfläche *o*, alsdann über diese Fläche fortgehend gelangen wir nach *l*, *λ*, *x*, *h*, um über *xλl* und *o* wieder zur *d* zu kommen, welche dem ersten *d* parallel liegt. Alle diese Flächen haben den Ausdruck $a:c$, unter der Voraussetzung, dafs man sie alle durch einen Punkt legt, d. h. projicirt. Nehmen wir ein Axenkreuz zur Hand, und verbinden die Endpunkte der *a* und *c* mit einem Faden, so ist diefs die Zonenaxe für sämmtliche obige Flächen; legen wir weiter ein Kartenblatt an jenen Faden, so wird dieses Blatt durch die Axenpunkte *a* und *c* gehen, drehen wir es zunächst so, dafs es der dritten Axe *a* parallel geht, so stellt das Blatt die Dodekaidfläche *d* dar, sobald wir es aber der Oktaederfläche (also zur Linken) zuneigen, wird das Blatt die dritte Axe *a* unter allen Verhältnissen schneiden, die kleiner sind als Unendlich (∞a), aber gröfser als $1a$, bis es zuletzt den Axenpunkt *a* trifft, also in den Endpunkten aller drei Axen liegt ($a : a : c$). Alle diese Flächen, welche zwischen den beiden Gränzen *d* und *o* liegen, nannten wir zwischen *d* und *o* liegende, sie schärfen die Oktaederendkanten zu, sind also den Pyramidenoktaedern analog, die im 4gliedrigen Systeme selten auftreten. Bewegen wir das Blatt, welches jetzt der Lage von *o* entspricht, noch weiter um den Faden, so wird die dritte Axe *a* unter einem kleinern Verhältnifs, als die Einheit, geschnitten, das Blatt geht also nach und nach der *l*, *λ* und *x* parallel, in welchen Fällen *a* unter $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ geschnitten wird, bis es zuletzt dieselbe unter $\frac{1}{\infty} = 0$ trifft, d. h. das Blatt der *h* parallel geht. Alle diese Flächen, welche zwischen *o* und *h* liegen, sind den Leucitoiden des regulären Systemes analog. Mit diesen beiden Abtheilungen ist aber die ganze Zone erschöpft, es sind

aufser diesen keine Flächen in der Oktaederkante denkbar.

Schreiten wir nun zur Bestimmung von g (Fig. 36.) fort, durch welche die Kante zwischen d und l abgestumpft wird, so leuchtet ein, dafs wenn l in der Kantenzone des Dodekaides d/d lag, g ebenfalls darin liegen müsse, wir dürfen also auf Tab. I. nur die Kantenzone des Dodekaides suchen (z. B. $(a+b)$ im vordern rechten Quadranten), in dieser liegt die Dodekaidfläche $\overline{|a : c : \infty b|}$ und die Leucitoidfläche $\overline{|\frac{1}{2}a : b' : c|}$, zwischen beiden mufs g liegen, es wird also die Fläche $g = \overline{|\frac{2}{3}a : 2b' : c|}$ $= \overline{|\frac{1}{3}a : a : \frac{1}{2}c|}$ sein, wenigstens mufs die Fläche den Ausdruck $\overline{\left|\frac{1}{m}a : a : \frac{1}{n}c\right|}$ haben, worin $m-n=1$. Die g gehört also dem gewöhnlichsten 48flächner an, welcher die Kanten des Dodekaides zuschärft; wir finden in der Kante d/d' aber nur die eine Hälfte, die nach d hingeneigte, während die andere nach d' hingeneigte Hälfte fehlt.

Die Fläche γ fällt mit π und l in eine Zone, l geht aber von $a : \frac{1}{2}a$, folglich geht auch γ von $a : \frac{1}{2}a$, die dritte Axe c schneidet l in der Einheit, γ liegt darunter, also mufs es die c unter einem gröfsern Verhältnifs schneiden, etwa in $2c$, so dafs $\gamma = \overline{|a : \frac{1}{2}a : 2c|} = \overline{|2a : a : 4c|}$, diefs bestätigt sich auch. Denn die Flächen x bilden ein Parallelogramm, folglich geht von γ über x, x nach γ eine Zone; die sichtbare Kante x/x geht aber von $a : 4c$, weil $x = \overline{|a : c : \frac{1}{4}a|}$, wie die überliegende $\lambda/\lambda = \overline{|a : 3c|}$, die $g/g = \overline{|a : 2c|}$ und die Fläche $d = \overline{|a : c|}$. Daher müssen auch im Ausdrucke der Fläche γ zwei Axen dasselbe Zeichen haben, wie auch $a : 4c$ beweist, während zu gleicher Zeit das Zeichen $a : 2a = \frac{1}{2}a : a$ der Zone $l\gamma\pi$ entspricht.

Endlich bleiben uns noch die Flächen t und τ zur Bestimmung übrig, sie liegen beide in der Seitenkantenzone des Oktaeders o, haben daher das Zeichen $a : a$, allein da sie unter der o liegen, so mufs die dritte Axe c unter einem gröfsern Verhältnifs als die Einheit geschnitten werden. Für die t läfst sich diefs Verhältnifs scharf bestimmen, weil sie mit den anliegenden l und γ in einer Zone liegt. Nehmen wir z. B. das vordere t im rechten vordern Quadranten, so erhält das rechts oben anliegende l das Zeichen $|\overline{\underline{a : c : \tfrac{1}{2}b}}|$ (Tab. I.), das links unten anliegende γ den Ausdruck $|\overline{\underline{c : \tfrac{1}{2}b : \tfrac{1}{4}a}}|$, beide Flächen haben den Ausdruck $\tfrac{1}{2}b$ gemein, in welchem sie sich schneiden; von $c : \tfrac{1}{2}b$ geht also ihre gemeinsame Kante, in welche zu gleicher Zeit t fällt, t geht also auch von $c : \tfrac{1}{2}b$, da es aber in der Seitenkantenzone des Oktaeders lag, so mufs seine Sektionslinie mit der Linie $a:b$ parallel gehen, woraus das Zeichen $|\overline{\underline{c : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}b}}|$ erwächst, d. h. $|\overline{\underline{2c : a : a}}|$. Die Fläche τ hingegen mufs das Zeichen $|\overline{\underline{a : a : 4c}}|$ haben, denn sie fällt zu beiden Seiten über γ hinaus mit der Kante x/x, die von $a : 4c$ ging, in eine Zone. Die beiden Flächen t und τ sind einem Pyramidenoktaeder analog, denn sie schärfen die Seitenkanten des Oktaeders zu, die 4 und 4kantner desselben aber fehlen. Sie bilden dadurch ein Gegenstück zu den Leucitoiden, wo umgekehrt die 4 und 4kantner (l, λ, x) auftraten, aber die Oktaeder fehlten.

Die Deduktionskörper des dreigliedrigen Oktaeders

$\overline{\underline{|c : a : a : \infty a|}}$.

Das in §. 22. beschriebene 3+1flächige Oktaeder bekam eine symmetrische Stellung, wenn wir den einzigen sich von den übrigen einander gleichen Krystallräumen unterscheidenden (*a* Tab. IV. Fig. 18.) horizontal stellten, alsdann bildeten die Flächen der 3 unter sich gleichen Krystallräume (*b*, *c*, *d*) sechs Kanten, die im Zickzack auf und ablaufen. Verbinden wir nun die Mitte der Kanten des Zickzacks, so entstehen 3 der Horizontalebene (*a*) parallel gehende Axen, die in einer Ebene liegen und unter sich gleich sind. Projiciren wir auf diese Axenebene das Oktaeder (Tab. VI. Fig. 1.), so werden die 3 Sektionslinien *o* zwei Axen schneiden und der dritten parallel gehen, also das Zeichen $\overline{\underline{|a : a : \infty a|}}$ erhalten. Um die Axen jedoch immer bestimmt unterscheiden zu können, haben wir dieselben mit den Buchstaben *a*, *x*, *y* versehen, unter welchen wir aber immer die unter sich gleichen *a* denken mögen. Dafs die Axen sich unter 60° schneiden müssen, folgt aus dem gleichseitigen Dreiecke *a*, da die 3 Axen den Seiten desselben respektive parallel laufen. Dehnen sich die 3 gleichen Krystallräume des 3gliedrigen Oktaeders im Gleichgewicht aus, so dafs die Fläche *a* ganz verdrängt wird, so entsteht das besondere Hexaid (Tab. VI. Fig. 2.), welches man *Rhomboeder* nennt. Seine 3 Krystallräume sind von kongruenten Rhomben begränzt, die Endecken *c* und *c'* sind gleichkantig (3kantig), und die 6 im Zickzack liegenden Seitenecken (1,1') 2+1kantig, wie aus den 3 geschobenen, unter sich gleichwinklichen, vierseitigen Säulen des Körpers folgt. Die 3+3 Kanten, welche in *c* und *c'* zusammenstofsen, heifsen *Endkanten*, und die übrigen 6 (1,1') im Zickzack liegenden die *Seitenkan-*

ten; die Endkanten können scharf oder stumpf sein, dann sind aber die Seitenkanten stumpf oder scharf, wie aus den 3 vierseitigen Säulen folgt. Vergleichen wir das Rhomboeder mit dem 3gliedrigen Oktaeder, so müssen die 6 Ecken desselben mit 6 Seitenecken $(1,1')$ des Rhomboeders zusammenfallen, man kann also dieses das eingeschriebene Oktaeder des Rhomboeders nennen. Die 6 im Zickzack liegenden Seitenkanten des 3gliedrigen Oktaeders fallen daher mit den 6 Seitenkanten $(1,1')$ des Rhomboeders zusammen. Daraus folgt dann leicht, dafs die 3 Seitenaxen aaa die Mitte der Rhomboederseitenkanten verbinden. Die vierte Axe c verbindet die beiden Endecken (c und c') des Rhomboeders, geht also ebenfalls durch den gemeinsamen Durchschnittspunkt der 3 Axen a, und wird hier halbirt, wie sich leicht aus der Kongruenz der Rhomben folgern läfst. Daher bekommen die 3 Krystallräume des Rhomboeders den allgemeinen Ausdruck

$$o = \overline{|c : a : a : \infty a|};$$

sie entsprechen den 3 unter sich gleichen Krystallräumen des 3gliedrigen Oktaeders, der vierte Krystallraum, welchen wir mit o' bezeichnen wollen, ist dann

$$o' = \overline{|c : \infty a : \infty a : \infty a|},$$

weil er den 3 Seitenaxen parallel liegt; er bildet demnach in Tab. VI. Fig. 1. die Projektionsebene.

Weil das Rhomboeder in vorstehendem Systeme der vorherrschende Körper ist, so wird das System auch das *rhomboedrische* genannt.

Wie im 4gliedrigen Systeme, so folgern wir auch hier alle möglichen gleichflächigen (mit unter sich gleichen Krystallräumen) Körper aus der allgemeinen Deduktionsfigur und aus den Körpern des regulären Systemes. Vom Hexaide und Dodekaide ist es schon §. 31. nachgewiesen. Das Hexaid h stumpft die 3 unter sich gleichwerthigen Ecken des 3gliedrigen Oktaeders ab. Diese Ecken fallen

aber mit den Rhomboederseitenecken (111) zusammen, folglich werden die *h* die Endkanten des Rhomboeders abstumpfen müssen. Die 3 *h* bilden daher unter sich ein zweites Rhomboeder, das erste stumpfere genannt, dessen Flächen wie die Kanten, und dessen Kanten wie die Flächen des Hauptrhomboeders liegen. Projiciren wir dasselbe auf Tab. VI. Fig. 1., so ergibt sich der Ausdruck

$$h = \overline{\underline{|c : 2a : 2a : \infty a|}}.$$

Das Dodekaid stumpft die Kanten des Oktaides und Hexaides zugleich ab, beide sind aber in unserm Systeme 3+3kantig, daher müssen sich auch die Flächen in 3+3 zerlegen. Zunächst erhalten die Flächen *d*, welche im 3gliedrigen Oktaeder die 3 Kanten o/o' abstumpfen, in der Projektionsfigur den Ausdruck

$$d = \overline{\underline{|c : 4a : 4a : \infty a|}}.$$

Es ist diefs das zweite stumpfere vom Rhomboeder *o*, weil es zugleich die Kanten des Rhomboeders *h* abstumpft. In Tab. VI. Fig. 3. ist *o* das Hauptrhomboeder, *h* das erste stumpfere, das die Endkanten zwischen o/o abstumpft, und *d* das zweite stumpfere, welches über *o* liegend wieder die Endkanten zwischen h/h abstumpft. Vom Dodekaide bleiben nun noch die drei d' übrig, sie stumpfen die Kanten o/o ab, also die Seitenkanten des Hauptrhomboeders, demnach ist in der Projektion

$$d' = \overline{\underline{|\infty c : a : \tfrac{1}{2}a : a|}},$$

denn wir dürfen die Sektionslinien d' nur parallel bewegen, um den Ausdruck zu bekommen.

Die Projektion dieser 3 Körper (*o* und o', *h*, *d* und d') ist dieselbe, welche wir Tab. II. Fig. 4. gegeben haben, der Zonenkonnexus also bekannt. Vergleichen wir unser 3gliedriges Dodekaid (Tab. VI. Fig. 4.) mit dem Dodekaide des 4gliedrigen Systemes (Tab. V. Fig. 32.), so leuchtet der auffallende Unterschied ein, dafs hier die gleichen Kan-

ten sich zu 4 gruppirten ($4\,d/d$, $2.4\,d/d'$, $\frac{1}{2}.4\,d'/d'$), während sie im jetzigen Systeme zu 3 auftreten, wir haben 3 Kanten d/d, 3 Kanten d'/d', 2.3 Kanten d/d, wenn wir die parallelen nicht mitzählen. Wenn im 4gliedrigen 4+2 Krystallräume waren, so sind hier 3+3, und wenn wir das Dodekaid ins Gleichgewicht treten lassen, so werden die $3d'$ der Säule und die $3d$ des aufgesetzten Rhomboeders unter sich kongruent sein müssen, alles diefs folgt aus der Differenz der Axen des Systemes, so wie aus der der Krystallräume.

Analysiren wir in gleicher Weise die folgenden Körper, so wird stets eine Gruppirung der Flächen nach drei entstehen, sobald wir dem Körper seine rhomboedrische Stellung geben, d. h. ihn auf eine Fläche des eingeschriebenen Oktaeders legen. So zunächst das Leucitoeder Fig. 5., das in dreierleiwerthige Krystallräume zerfällt. Denn da das Leucitoeder die Kanten des Dodekaides abstumpfen mufs, so werden die 3 gleichen Endkanten d/d des Rhomboeder d (Fig. 4.) ein neues Rhomboeder l (Fig. 5.) geben, welches von o angerechnet das dritte stumpfere ist, also über h (Fig. 3.) liegen müfste. In der Projektionsfigur erhält diefs den Ausdruck

$$l = \overline{|c : 8a : 8a : \infty a|}.$$

Die Säulenkanten des Dodekaides (d'/d') werden durch die l' (Fig 5.) abgestumpft, dadurch wird uns noch eine andere sechsseitige Säule, die Axenlinien a (a, x, y) entsprechen ihren Sektionslinien in der Projektion, daher

$$l'' = \overline{|\infty c : a : a : \infty a|}.$$

Die beiden sechsseitigen Säulen stumpfen gegenseitig ihre Kanten ab, da nun die sechsseitige Säule d' die Seitenkanten des Rhomboeders o abstumpfte, so wird die sechsseitige Säule l'' die Seitenecken abstumpfen, ihre Flächen werden also unter den Flächen o liegen.

Jetzt bleiben nur noch die 6 Kanten d'/d (Fig. 4.)

übrig, sie sind unter sich gleich, ihre Abstumpfungsflächen l' (Fig. 5.) müssen daher einem sechsräumigen Krystalle angehören. Projiciren wir sie zuerst, so ist aus Tab. I. bekannt, dafs die l in die Kantenzone des Dodekaides fallen und zu gleicher Zeit in die Zone der Oktaidkante; um daher die richtige Sektionslinie zu bekommen, verbinden wir die Punkte des Dodekaidrhomboeders (d/d) mit den Oktaidkanten o/o. Wir sehen, dafs solcher Sektionslinien l' 6 möglich sind, mit dem Ausdrucke

$$l' = |\overline{c : 2a : \tfrac{4}{3}a : 4a}| = |\overline{\tfrac{1}{4}c : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a : a}|.$$

Lassen wir die 6 Krystallräume l' sich bis zum Verschwinden der übrigen ausdehnen, so bekommen wir den 3 *und* 3*kantner* (Fig. 6.), das Maximum von gleichen Krystallräumen, das möglicher Weise im 3gliedrigen Systeme auftritt. Seine Gränzflächen sind 2 . 6 = 12 ungleichseitige unter sich kongruente Dreiecke, daher $\frac{3 . 12}{2} = 18$ Kanten, von denen die Hälfte der andern parallel läuft (wie aus den Krystallräumen folgt). Die 3 + 3 = 6 gleichen Seitenkanten z laufen im Zickzack, durch sie kann ein Rhomboeder gelegt werden, man nennt es das *eingeschriebene Rhomboeder*. Ueber den Flächen des eingeschriebenen Rhomboeders erheben sich die 3 stumpfen Endkanten y, über den Kanten desselben die 3 scharfen x. Dadurch bilden sich dann die 3 + 3kantigen Endecken (c und c') des Körpers, woher der Name 3 + 3kantner, und die [illegible]chs 2 + 1 + 1kantigen Seiten[illegible] Körper kommt oftmals ganz selbstständig ohne alle untergeordneten [illegible]lächen vor.

Geben wir dem Pyramidenwürfel sein[illegible] rhomboedrische Stellung, so zerlegt er sich im Allgemeinen in zwei 3 und 3kantner. Es folgt diefs schon aus dem Leucitoide, an dem er die gebrochenen Oktaederkanten abstumpft. Diese zerlegen sich nemlich (Fig. 5.) in die Kanten l/l' und l'/l', von jeder Abtheilung 12. Wir wählen zuerst den gewöhn-

lichen Pyramidenwürfel $|\overline{a : \frac{1}{2}a : \infty a}|$ wählen, ihn in die Projektionsfigur eintragen, was sich leicht ausführen läfst. Um zunächst die obern 6 gleichen Krystallräume einzuzeichnen, müssen wir uns die gebrochenen Oktaederkanten l/l' suchen, und zwar diejenigen, in welche zu gleicher Zeit die Sektionslinie h fällt. Solcher sind 6 vorhanden, verbinden wir diese mit den noch nicht verbundenen Hexaidkanten h/h durch die Sektionslinien π (denn der Pyramidenwürfel mufs ja in die Würfelkante fallen), so erhalten wir den Flächenausdruck

$$\pi = |\overline{c' : 6a : 3a : 6a}|.$$

Diese 6 Krystallräume haben das Merkwürdige, dafs sie nicht einem 3+3kantner, sondern einem 6kantner angehören, wie das reguläre Sechseck in der Projektion (durch Punkte hervorgehoben) beweist. Wir sind zu einem sogenannten

Dihexaeder (Tab. IV. Fig. 69.) gelangt, dessen 12 Dreiecke π gleichschenklich sind, daher die 6 Seitenkanten (s) von den 24 Endkanten (e) verschieden. Natürlich unterscheidet man an ihm die 6kantigen Endecken von den 2+2kantigen Seitenecken. Nächst dem Rhomboeder ist diefs der einfachste Körper des Systemes. Daher kann man bei der systematischen Entwicklung von ihm ausgehen, über das Verhältnifs beider zu einander siehe unten.

Unter dem Dihexaeder des Pyramidenwürfels liegt noch ein wahrhafter 3 und 3kantner

$$\pi = |\overline{c : 2a : \tfrac{[illegible]}{3}a} \ [illegible] \ a : \tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{2}a|;$$

wie schon der Ausdruck zeigt, so finden wir in der Projektion die Sektionslinie des 3+3kantner l' der π' parallel laufen, bewegen wir also beide Sektionslinien l' und π' in eine Linie zusammen, so geht l' nach $\frac{1}{4}c$, wenn π' nach $\frac{1}{2}c$ geht, die Fläche l' liegt also über der π'.

Würden wir nun zu den Pyramidenoktaedern fortschreiten, so möchten wir unter den vielen möglichen den-

jenigen wählen, welcher die gebrochenen Würfelkanten des Leucitoeders abstumpft, dessen Ausdruck wir im Beispiele des Flufsspathes $|\frac{1}{2}a : a : a|$ fanden. Sein oberstes stumpfes Rhomboeder würde die Endkanten vom Rhomboeder des Leucitoeders (l) abstumpfen, dadurch erhielten wir ein neues Rhomboeder $|c : 16a : 16a : \infty a|$. Unter diesem stumpfen liegt ein schärferes

$$t = |c : \tfrac{8}{5}a : \tfrac{8}{5}a : \infty a|,$$

welches die stumpfe Endkante am 3 und 3kantner des Leucitoeders abstumpft, während das Hexaid $h = |c : 2a : 2a : \infty a|$ die scharfe Endkante desselben 3 und 3kantner abstumpfte. Jetzt bleiben noch unter den beiden Rhomboedern des Pyramidenoktaeders ein 3 und 3kantner übrig, womit wir jedoch die Figur nicht überladen wollen.

Was endlich den 48flächner $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a|$ anbelangt, so kommen aufser drei neuen 3 und 3kantnern, deren Entwicklung wir dem Leser überlassen, noch 6 Krystallräume vor, die in einer und derselben Säulenzone liegen. Denn da dieser 48flächner (wie alle mit dem Ausdruck $\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a$, wo $m-n=1$) die Dodekaidkanten abstumpfen mufs, 3 der Dodekaidkanten aber (d') im Mittelpunkte der Construktion eine sechsseitige Säule bilden, so müssen die Sektionslinien von 6 Krystallräumen desselben im Mittelpunkte der Construktion einer 6 + *6kantigen Säule* angehören, 6 Kanten über den Flächen und 6 Kanten über den Kanten der sechsseitigen Säule d' liegend. Um diese Säule eintragen zu können, darf man aus Tab. I. nur festhalten, dafs jede g in eine Dodekaidkantenzone d/d und zugleich in eine Zone durch $\pi\pi do$ gebildet fällt. Der d/d entspricht auf Tab. VI. der Mittelpunkt d'/d', dem $\pi\pi do$ entsprechen Punkte mit denselben Buchstaben $\pi'\pi do$, nur dafs das eine π gestrichelt ist. Daraus ergibt sich die Säulenfläche

$$g = |\overline{\infty c : a : \tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{4}a}|;$$

sie mufs die 12 gleichen Kanten d'/l'' der beiden sechsseitigen Säulen d' und l'' abstumpfen.

Das rhomboedrische System bietet also eine ganze Reihe von abgeschlossenen Körpern dar, die den Körpern des regulären Systemes analog sind, nur dafs die Körper nicht immer aus gleichen, sondern aus mehreren Gruppen Krystallräumen bestehen. Dem *Würfel* entspricht zunächst das *Rhomboeder*, es ist ebenfalls gleichflächig, allein seine 3 unter sich gleichwinklichen Säulen sind nicht rechtwinklich, sondern geschoben. Dem *Oktaeder* entspricht ein 3+1*flächiges Oktaeder*, die 3 gleichen Krystallräume bilden stets ein Rhomboeder, der vierte ist einzig, man nennt ihn die Gradendfläche, analog der Gradendfläche des 4gliedrigen Systemes. Dem *Granatoeder* entspricht das *Rhomboeder mit abgestumpften Seitenkanten*, es ist nicht immer von gleicher Deduktion, doch der Zonenkonnexus und die typische Form ist dem Granatoeder gleich; es besteht aus 3+3 Krystallräumen (d und d'), folglich im Gleichgewicht von 6+6 Rhomben begränzt, von denen die ersten 6 unter sich kongruent der Säule, die andern 6 unter sich kongruent dem Rhomboeder angehören. Dem *Leucitoeder* entspricht ein Körper von 24 symmetrischen Trapezoiden begränzt (Fig. 5., was nur regulär gezeichnet ist), die in 3 Gruppen zerfallen, die 6 unter sich kongruenten l'' gehören der Säule, die 12 unter sich kongruenten l' einem 3 und 3kantner, und die 6 unter sich kongruenten l einem Rhomboeder an. Zwar sind auch diese nicht immer durch eine dem Leucitoide des regulären Systemes gleiche Deduktion entstanden, doch ist der Zonenkonnexus und die typische Form dieselbe. Dem *Pyramidenwürfel* entspricht genau ein *Pyramidenrhomboeder*, seine Krystallräume sind zweierleiwerthig: 12π, welche die Endkanten, und $12\pi'$, welche die Seitenkanten des eingeschriebenen Rhomboeders

zuschärfen, daher die Gränzflächen ungleichseitige Dreiecke 12π unter sich kongruent, und $12\pi'$ ebenfalls. Der Flächenzusammenhang vom Pyramidenoktaeder kommt zwar vor, allein derselbe tritt, wie auch im regulären System, nicht in selbstständiger Form auf. Gleiches gilt von den 48flächnern.

Wir sind bei unserer Flächenanalyse von den Axen des Oktaeders ausgegangen, aus welchen wir dann alle folgenden Flächen deducirten. Sind dieselben einmal deducirt und projicirt, so kann man von den Axen jedes beliebigen Rhomboeders ausgehen, wonach sich dann alle übrigen Axenausdrücke modificiren. In diesem Sinne kann man dann auch sagen, um die Axen eines rhomboedrischen Systemes zu bestimmen, bedarf ich keines Oktaides, sondern nur eines Rhomboeders im Gleichgewicht, d. h. mit kongruenten Gränzflächen. Allein da bei einem methodischen Gange die gröfste Allgemeinheit auf einfachstem Wege erreicht werden mufs, so hätten wir in der allgemeinen Zonenlehre das Hexaid nur durch allerlei nicht hingehörige weitläufige Nebenbetrachtungen ins Gleichgewicht bringen können, zugleich aber auch noch das Oktaid ins Gleichgewicht bringen müssen; da nun ferner das Oktaid (*abcd*) der allgemeinere Körper ist, denn die aus ihm durch Ausdehnung der Krystallräume abgeleiteten 4 Hexaide (*abc*, *abd*, *acd*, *bcd*) sind stets im Gleichgewicht, sofern das Oktaid im Gleichgewicht ist, aber nicht umgekehrt ist das durch Abstumpfung der Hexaidecke abgeleitete Oktaid im Gleichgewicht, wenn das Hexaid im Gleichgewicht war: so wird der Lehrer immer klarer und consequenter sein, wenn er bei aller Systematik von keinem andern Körper, als dem Oktaide, ausgeht. Sobald aber dadurch eine tiefere Einsicht in das System geworden ist, mag er dann mit gröfserer Freiheit Formen wählen.

So wollen auch wir, nachdem der ganze Entwicklungsgang feststeht, vom Rhomboeder (Hexaide) *h* ausgehen, mit

dem übrigens die Gradendfläche o' ebenfalls ein 3gliedriges Oktaeder bildet, dessen 3 geneigte die Ecken verbindende Axen dem Systeme in anderer Stellung gleichfalls zu Grunde gelegt werden können. Es war aber $h = |c : 2a : 2a : \infty a|$ $= |\frac{1}{2}c : a : a : \infty a|$, und wollen wir diesen Axenausdruck zur Einheit der Axen nehmen, so müssen wir ihn mit der durch $o = |c : a : a : \infty a|$ bestimmten Axeneinheit vergleichen. Beide unterscheiden sich nur durch c; wenn früher c die Einheit war, so soll jetzt $\frac{1}{2}c$ die Einheit werden. Setzen wir also $\frac{1}{2}c = \gamma$, so ist

$$h = |\gamma : a : a : \infty a|$$
$$o' = |\gamma : \infty a : \infty a : \infty a|$$
$$o = |2\gamma : a : a : \infty a| = |\gamma : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}a : \infty a|$$
$$d = |\tfrac{1}{2}\gamma : a : a : \infty a| = |\gamma : 2a : 2a : \infty a|$$
$$d' = |\infty\gamma : a : \tfrac{1}{2}a : a|$$
$$l'' = |\infty\gamma : a : a : \infty a|$$
$$l = |\tfrac{1}{4}\gamma : a : a : \infty a| = |\gamma : 4a : 4a : \infty a|$$
$$l' = |\tfrac{1}{2}\gamma : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a : a| = |\gamma : a : \tfrac{2}{3}a : 2a|$$
$$\pi = |2\gamma : 6a : 3a : 6a| = |\gamma : 3a : \tfrac{3}{2}a : 3a|$$
$$\pi' = |2\gamma : 2a : \tfrac{2}{3}a : a| = |\gamma : a : \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}a|$$
$$t = |2\gamma : \tfrac{8}{5}a : \tfrac{8}{5}a : \infty a| = |\gamma : \tfrac{4}{5}a : \tfrac{4}{5}a : \infty a|$$
$$g = |\infty\gamma : a : \tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{4}a|.$$

Anstatt γ kann man nun wieder c schreiben, die Ausdrücke sind dann möglichst einfach, und gerade diejenigen, welche am häufigsten im rhomboedrischen Systeme erscheinen.

Ueberschauen wir nun noch einmal das gewonnene Resultat, so tritt zunächst nur als ein einziger Krystallraum die Gradendfläche $|c : \infty a : \infty a : \infty a|$ auf, sie entspricht

der Gradendfläche des 4gliedrigen Systemes, es ist also ein einziger blättriger Bruch hier wie im 4gliedrigen möglich. Dann kommen 3 unter sich gleiche Krystallräume $\left|c : \frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a : \infty a\right| = \left|mc : a : a : \infty a\right|$, wo m jene rationale ganze und gebrochene Zahl bedeutet, die einem Rhomboeder entsprechen. Hiernach zu schliefsen, mufs jedes Rhomboeder in seinem Axenausdrucke ∞a enthalten, während die übrigen beiden a in der Gleichheit geschnitten werden. Gegenseitig verglichen können alle diese Rhomboeder nur zweierlei Lagen annehmen: *die Flächen der einen Gruppe liegen wie die Kanten der andern und umgekehrt.* Wir bekommen daher auch hier, analog dem 4gliedrigen Systeme, Rhomboeder 1ster und 2ter Ordnung, die unter sich noch weniger verschieden sind, als die Oktaeder des 4gliedrigen Systemes, da hier nicht einmal die Axenausdrücke beider Ordnungen sich irgend wie unterscheiden. Um daher die relative Lage dieser Rhomboeder schon am Zeichen zu erkennen, müssen wir irgend eine der beiden Ordnungen noch mit einem Merkmale versehen, z. B. die Rhomboeder 2ter Ordnung mit einer vorgesetzten Null (0), also wenn $\left|c : \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : \infty a\right| = o$ der 1sten Ordnung angehört, so soll $0\left|c : a : a : \infty a\right| = h$ der 2ten Ordnung angehören, woraus sich die Lage der Flächen in der Projektionsfigur ergibt. Es leuchtet dann weiter sogleich ein, dafs wenn wir von irgend einem Rhomboeder ausgehen (seine Axeneinheiten dem Systeme zu Grunde legen), das 2te, 4te, 6te ... $2n$ stumpfere und das 2te, 4te, 6te ... $2n$ schärfere Rhomboeder mit dem Hauptrhomboeder in eine Ordnung fallen, nemlich in die 1ste Ordnung, und das 1ste, 3te, 5te ... $2n+1$te stumpfere und das 1ste, 3te, 5te ... $2n+1$te schärfere dann der 2ten Ordnung angehören. Um den Zusammenhang von schärfern Rhomboedern zu verstehen, müssen wir den Leser auf Fig. 3.

Tab. VI. und deren Projektion verweisen; gehen wir hier von *h* aus, so ist Rhomboeder *d* das 1ste stumpfere, denn es stumpft die Endkanten von *h* ab, *o* hingegen das 1ste schärfere von *h*, denn die Endkanten von *o* liegen so, dafs sie durch *h* abgestumpft werden, man sagt, *o* fällt in die Diagonalzone von *h*, weil nemlich die Endkante *o/o* mit der Längendiagonale, im Parallelogramm *h* gezogen, parallel geht. Wir sehen daraus, dafs das 1ste stumpfere *d* und 1ste schärfere *o* derselben Ordnung angehören, denn die Flächen *d* und *o* liegen untereinander. Als wir vom Rhomboeder *o* ausgingen, war *h* das 1ste und *d* das 2te stumpfere, das 2te stumpfere *d* fällt also mit *o* in dieselbe Ordnung. Würden wir endlich vom Rhomboeder *d* ausgehen, so wäre *h* das 1ste schärfere, weil *d* die Endkanten von *h* abstumpft, *h* also in die Diagonalzone von *d* fällt; *o* aber das 2te schärfere, weil *h* die Endkanten von *o* abstumpft, also auch hier wird wieder die Regel bestätigt, dafs das 2te schärfere *o* mit dem Hauptrhomboeder *o* derselben Ordnung angehört.

Da man jedem Rhomboeder das Zeichen $\overline{|mc : a : a : \infty a|}$ unterlegen kann, so mufs es, wenn *m* eine sehr grofse Zahl wird, sich in $\overline{|\infty c : a : a : \infty a|}$ verwandeln, das Zeichen der Säule, welche die Seitenecken sämmtlicher Rhomboeder, folglich auch des Hauptrhomboeders abstumpft, sie heifst die *1ste Säule*. Die 2te Säule $= \overline{|\infty c : a : \frac{1}{2}a : a|}$ stumpft die Seitenkanten sämmtlicher Rhomboeder, folglich auch des Hauptrhomboeders, ab. Beide Säulen stumpfen aber gegenseitig ihre Säulenkanten ab, während die 6+6 kantige Säule $\overline{|\infty c : a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a|}$ diejenigen Kanten abstumpft, welche die Flächen der einen Säule mit den Flächen der andern bilden.

Die 3+3kantner erhalten den allgemeinen Ausdruck

$\left|\frac{1}{p}c : a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a\right|$; denn da der Ausdruck $\left|a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a\right|$ jede beliebige durch Punkt a gehende Sektionslinie der Projektionsebene (Fig. 1. Tab. VI.) enthält, zu jeder Sektionslinie aber unendlich viel Flächen gedacht werden können, welche die Axe c in ebenso unendlich vielen Verhältnissen schneiden, so mufs der c noch der allgemeine Faktor $\frac{1}{p}$ vorgesetzt sein. Wie dem Rhomboeder 3, so gehören diesem Ausdrucke 6 gleiche Krystallräume an. Es folgt diefs aus der Deduktion. Denn überschauen wir das Projektionsbild, so ergibt sich, dafs in der ganzen Figur niemals mehr als 6 unter sich gleichwerthige Sektionslinien gezogen werden können, d. h. Sektionslinien, welche in gleichwerthigen Zonenpunkten liegen. Daher kann es in diesem Systeme keinen Körper geben, der mehr als 6 Krystallräume hätte. Wir werden immer finden, dafs zu jedem 3+3kantner ein Rhomboeder vorhanden ist, dessen Seiten oder Endkanten durch den 3+3kantner zugeschärft werden. Daher sind uns mit jedem Rhomboeder zwei Abtheilungen von 3+3kantnern gegeben, von denen die eine Abtheilung die Endkanten, die andere die Seitenkanten des Rhomboeders zuschärft. Welcher von den beiden dieser Gruppen der vorhandene 3+3-kantner angehört, wird aus der Projektion klar. So sehen wir z. B., dafs die 3 und 3kantnerflächen π' die Seitenkanten des Rhomboeders h zuschärfen, weil je zwei Sektionslinien π' von je zwei h eingeschlossen werden; hingegen schärfen die π die Endkanten von h zu, weil hier umgekehrt die h von den π eingeschlossen werden. Da alle (π, π', h) in eine Zone fallen, so liegt die eine Abtheilung (π'), welche die Seitenkanten des zu Grunde liegenden Rhomboeders zuschärft, zwischen der Säulenfläche d' und der Rhomboederfläche h, die andere Abtheilung (π), welche die Endkanten zuschärft, zwischen der Rhomboederfläche h und der nächsten stumpfern Rhomboederfläche d,

was die gleichnamigen Sektionslinien beweisen. Der Anfänger mag sich diefs wieder mit einem Kartenblatte, das er am Axenkreuze um die Rhomboederkante dreht, klar machen. Weiter aber geht aus der Darstellung hervor, dafs so wie es Rhomboeder zweier Ordnungen gibt, es auch 3 und 3kantner zweier Ordnungen geben müsse: *erster Ordnung*, wenn sie die Rhomboederkanten erster Ordnung, *zweiter Ordnung*, wenn sie die Rhomboederkankanten zweiter Ordnung zuschärfen. Wie bei den Rhomboedern, so kann man diesen Unterschied durch eine vorgesetzte Null oder Eins am Zeichen andeuten.

Wenn wir die sechsseitige Säule als ein Rhomboeder mit unendlicher Axe betrachten, so kann man auch die zwölfseitige Säule als einen unendlich scharfen 3 und 3kantner ansehen.

Auch das Dihexaeder mufs im rhomboedrischen Systeme als ein 3+3kantner angesehen werden, dessen Endkanten nicht mehr different, sondern gleich geworden sind, wie die Flächen π zeigen. Ein solches Dihexaeder ist daher dem rhomboedrischen Systeme nicht fremd, sondern gehört wesentlich zum Entwicklungsgange desselben (Korund, Eisenglanz).

Die Hemiedrie des dreigliedrigen Systemes.

Da wir den 3 und 3kantner (Fig. 6. Tab. VI.) als den allgemeinsten Körper unseres Systemes kennen gelernt haben, und da dieser Körper von kongruenten ungleichseitigen Dreiecken eingeschlossen wird, so kann man auf ihn das bekannte Princip der Hemiedrie, wo eine Fläche wächst, während die drei anliegenden verschwinden, ebenfalls anwenden. Denken wir uns die wachsenden Flächen mit 1, die verschwindenden mit 0 bezeichnet, so gruppiren sich die 0 und 1 dergestalt um die Endecken c, dafs jeder 0 zu den Seiten die Flächen mit 1, und umgekehrt, sich

anlagern. Würden also die 0 wachsen, so bildeten sie über den verschwindenden 1 drei von c ausstrahlende gleiche Kanten, ebenso an c', daher müssen die 0 einem Rhomboeder angehören, ebenso die 1, wir bekämen dadurch *Rhomboeder einer Zwischenstellung.* Denn hätte der 3 und 3-kantner das Zeichen $|c : a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$, so hätte auch das neue daraus entstehende Rhomboeder dasselbe Zeichen, aus der Sektionslinie sieht man aber, dafs sie mit keiner Sektionslinie der Rhomboeder beider Ordnungen parallel geht, folglich kann auch das Rhomboeder (0 und 1) zu keiner der beiden Ordnungen gehören, es ist also eine neue zwischen beiden Ordnungen liegende Reihe. In der Natur kommen die Flächen sehr selten vor, sie geben wie die Oktaeder der Zwischenstellung im 4gliedrigen Systeme dem Krystalle ein gedrehtes Ansehen (Dioptas).

Auch das Dihexaeder mit 12 gleichschenklichen Dreiecken kann man dem hemiedrischen Gesetze unterwerfen. Bezeichnen wir auch hier die wachsenden mit 1 und die verschwindenden mit 0, und denken die 1 wachsen, so bilden letztere über den 6 Flächen 0 eben so viel 2+1kantige Seitenecken, die Mitte der rhomboedrischen Seitenkanten fällt mit den Seitenecken des Dihexaeders zusammen, während die Endecken des Rhomboeders den Endecken des Dihexaeders entsprechen. Man kann daher jedem Rhomboeder ein Dihexaeder einschreiben, wenn man die Endecken mit der Mitte der Seitenkanten durch Linien verbindet. Es werden dann 6 Dihexaederflächen des eingeschriebenen Dihexaeders mit den Rhomboederflächen zusammenfallen, die übrigen 6 Dihexaederflächen die rhomboedrischen Endkanten unter nach den Endecken convergirenden Kanten abstumpfen. Was aber von dem einen Rhomboeder (1) des Dihexaeders gilt, das gilt auch von dem andern (0). Denken wir uns daher beide zugleich über die Dihexaederflächen hinaus wachsen, so wird jede

der Dihexaederflächen mit einer 2+1flächigen Pyramide bedeckt werden, denn die Seitenkanten des Rhomboeders kreuzen sich in den Seitenecken des Dihexaeders, und die Endkanten des Rhomboeders strahlen über den Dihexaederflächen sich erhebend von den Endecken aus. Zwei anliegende Flächen (0 und 1) verschiedener Rhomboeder schneiden sich aber in den Dihexaederkanten, und zwar so, dafs die um c gelagerten sich mit den um c' gelagerten in einem regulären Sechseck schneiden, welches die Seitenecken des Dihexaeders verbindet. Zwei solche Rhomboeder nennt man *Rhomboeder* und *Gegenrhomboeder*. Beide sind so gegen einander gedreht, dafs ihre Axen wechselseitig zusammenfallen und die Ecken des einen Rhomboeders erheben sich über den Flächen des andern (cf. die Projektion des Dihexaeders π). Die Rhomboeder des Dihexaeders haben daher die Eigenschaft, dafs wenn das eine der ersten Ordnung angehört, das andere der zweiten angehören mufs.

Demnach sind wir nun auf zwei Wegen sowohl zum Rhomboeder, als auch zum Dihexaeder gelangt. Man kann das Rhomboeder aus dem Oktaide ableiten, und diefs ist für unsern Gang die consequenteste Ansicht; aber auch aus dem Dihexaeder, dann ist das Rhomboeder der hemiedrische Körper des Dihexaeders. Das Rhomboeder verhält sich also zu seinem Dihexaeder ähnlich, wie das Tetraeder zu seinem Oktaeder. Ebenso ist das Dihexaeder durch den 3 und 3kantner geworden, sobald beide Kantengruppen ins Gleichgewicht traten; doch kann man es ebenfalls aus der Durchwachsung zweier Rhomboeder entstehen lassen, es also als ein *Dirhomboeder* ansehen. Zu welcher Ansicht die Natur auffordert, müssen die physikalischen Kennzeichen der Krystalle dereinst entscheiden.

Die Deduktionskörper des sechsgliedrigen Systemes.

Vergleichen wir die Flächenausdrücke des Rhomboeders und 3 und 3kantners mit den gleichen in einem Sextanten möglichen Ausdrücken, so findet sich, dafs nur immer von den möglichen Sektionslinien die Hälfte vorhanden sind. Nemlich die Sektionslinie $\overline{|a : a : \infty a|}$ eines Rhomboeders könnte man sechs Mal in den Sextanten (a, a, a) eintragen (in jedem Sextanten eine), während sie nur drei Mal in den abwechselnden Sextanten vorhanden ist; ebenso die Sektionslinie $\overline{|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|}$ des 3 und 3kantners zwölf Mal (in jedem Sextanten zwei), während sie nur sechs Mal zu je zwei in den abwechselnden Sextanten sich findet. Leere und gefüllte Sextanten wechseln demnach immer mit einander ab.

Die Sektionslinien der beiden sechsseitigen Säulen, der zwölfseitigen und des Dihexaeders zeigen diese Eigenschaft nicht, sondern sie treten immer vollzählig auf, so dafs in Beziehung auf die Axen die unter sich gleichen Flächengruppen des rhomboedrischen Systemes in zwei Abtheilungen fallen:

1) Flächengruppen mit halbzähligen,

2) Flächengruppen mit vollzähligen Sektionslinien.

Denken wir uns ein System, worin die Sektionslinien (folglich auch die ihnen zugehörigen Flächen) beider Abtheilungen vollzählig sind, so erhalten wir das *dihexaedrische (sechsgliedrige) System.*

Der Weg, auf welchem wir zu einem solchen Systeme gelangen, ist auch hier ein doppelter. Man kann

1) das 6gliedrige System als die Durchdringung zweier rhomboedrischen betrachten. Denn verfertigen wir uns die Projektionsfigur eines rhomboedrischen Systemes (Tab. VI. Fig. 1.), zeichnen diese in denselben Dimensionen ab, legen

beide kongruente Projektionsfiguren aufeinander, drehen die eine um die andere um 60° (um einen Sextanten), so werden die von den 3+3kantnern und Rhomboedern gefüllten Sextanten auf die leeren kommen und umgekehrt. Denken wir uns weiter beide Figuren zu einer einzigen vereinigt, so wird die neuentstehende dritte Figur uns ein Projektionsbild geben, worauf alle Sektionslinien in Beziehung auf die Axen vollzählig erscheinen. Denn alle Sektionslinien, welche im rhomboedrischen Systeme vollzählig erschienen, sind in der neuen Figur aufeinander gefallen, und die, welche halbzählig auftraten, bleiben auseinander gehalten, wie man leicht einsieht. Zu dieser Ansicht bekennen sich diejenigen, welche das dihexaedrische System als *dirhomboedrisch* betrachten und folglich auch so nennen.

2) Kann und mufs man aber auch das Dihexaeder als einen selbstständigen Körper auffassen, sobald man dasselbe aus dem 3 und 3kantner entstehen läfst, denn alsdann ist es kraft der Deduktion nicht möglich, das Dihexaeder (π) aus zwei Rhomboedern entstanden anzusehen. Nehmen wir ein solches Dihexaeder, oder vielmehr die ihm zu Grunde liegenden Axen, als Ausgangspunkt, so lassen sich an ihm alle vollflächigen Körper folgendermafsen entwickeln:

Das Dihexaeder habe den Ausdruck $|\overline{c : a : a : \infty a}|$, so geht die Seitenkante von $|\overline{a : a}|$; eine Fläche, welche diese Kante gerade abstumpft, erhält also den Ausdruck $|\overline{\infty c : a : a : \infty a}|$, der Ausdruck der ersten sechsseitigen Säule (d'). Diejenige Säule, welche die Seitenecke abstumpft, wird $|\overline{\infty c : a : \tfrac{1}{2}a : a}|$ (l''), und die zwölfseitige Säule (g) wird die 6 Seitenecken zweiflächig zuschärfen, folglich alle 3 Axen a in der Ungleichheit schneiden. Endlich würde die Gradendfläche (o) die Endecke des Dihe-

xaeders abstumpfen, alles Flächen, wodurch sich das 6gliedrige System vom rhomboedrischen nicht unterscheidet.

Durch die Abstumpfung der Endkanten würde ein 1stes stumpferes Dihexaeder entstehen, dessen Flächen wie die Kanten des Hauptdihexaeders liegen. Die Endkanten dieses 1sten stumpferen Dihexaeders müssen von den Endecken ausstrahlend sich über den Flächen des Hauptdihexaeders erheben. Stumpfen wir daher diese Kanten abermals ab, so bekommen wir ein 2tes stumpferes Dihexaeder, dessen Flächen über den Flächen des Hauptdihexaeders liegen, also weiter eindringend die Endecken sechsflächig zuschärfen würden, und gingen wir von diesem zweiten stumpfern Dihexaeder aus, so würde das Hauptdihexaeder die Seitenkanten desselben zweiflächig zuschärfen, das 1ste stumpfere würde aber in die Diagonalzone des 2ten stumpfern fallen (einer Linie parallel, welche von der Endecke zur Mitte der Seitenkante gezogen wird), weil die Endkante des 1sten stumpfern durch das 2te stumpfere abgestumpft wird. Denken wir uns daher am Axenkreuze des Hauptdihexaeders ein Blatt durch die Seitenkante $\overline{|a : a|}$ um die Kante als Axe drehbar gelegt, so kann man dieses Blatt der Axe c parallel, also in die Lage der 1sten sechsseitigen Säule, bringen; dreht man das Blatt nur etwas um die Kante $\overline{|a : a|}$, so mufs die Axe c unter irgend einem rationalen (das irrationale schliefsen wir aus) Verhältnisse gröfser als 1 geschnitten werden, bis das Blatt zuletzt so weit kommt, dafs es mit der Dihexaederfläche zusammenfällt. Alle zwischen der Säulen- und Dihexaederfläche zwischenliegenden Dihexaeder stumpfen die horizontale Kante dieser beiden Flächen ab, oder, was dasselbe ist, schärfen die Seitenkanten des Dihexaeders zu. Drehen wir das Blatt von der Dihexaederfläche aus noch weiter, so wird es endlich mit den 3 Axen a in eine Ebene fallen, also der Gradendfläche parallel

gehen. Das Blatt mufs in diesem Raume die Axe c unter einem kleinern Verhältnisse als 1 schneiden, folglich auch die zwischen der Dihexaeder- und Gradendfläche liegenden Dihexaeder, die also die Kante dieser beiden Krystallflächen abstumpfen, darstellen. Zwischen Säule und Dihexaeder liegen die schärfern, zwischen Dihexaeder- und Gradendfläche die stumpfern Dihexaeder (verglichen mit dem Hauptdihexaeder). Dafs dasselbe auch von der andern Reihe von Dihexaedern gilt, die wie die Kanten des Hauptdihexaeders liegen, leuchtet ein, da die Dihexaeder 1ster und 2ter Ordnung sich nur durch die gegenseitige Lage von einander unterscheiden. Sämmtliche Dihexaeder sind aber im 3gliedrigen Systeme, wie im 6gliedrigen möglich, da sie aus der Projektionsfigur vollständig folgen.

Durch zweiflächige Zuschärfung der dihexaedrischen Endkanten entsteht das gebrochene Dihexaeder, der *6 und 6kantner* (Tab. IV. Fig. 70.). Seine obern Endkanten zerlegen sich in 6e, die mit den Endkanten des eingeschriebenen Dihexaeders zusammenfallen, und in 6e', die sich über den Flächen des eingeschriebenen Dihexaeders erheben, ebenso die den obern Endkanten parallelen untern. Die 12 Seitenkanten s sind unter sich gleich. Daraus folgt, dafs sämmtliche Dreiecke des 6 und 6kantners ungleichseitig sind. Die Endecken c und c' sind 6+6kantig, die Seitenecken zerlegen sich in 6 und 6 (es und $e's$), sind aber alle 2 und 2kantig. Denken wir uns die Seitenaxen a gelegt, welche die zwei sich gegenüberliegenden 2+2-kantigen Seitenecken $eses$ verbinden müssen, so sehen wir, dafs in jedem Sextanten zwei Flächen liegen. Es ist diefs also das Maximum von gleichartigen Krystallräumen, welche möglicher Weise im vieraxigen Systeme auftreten können. Treten diese Flächen untergeordnet auf (z. B. Beryllkrystall Tab. VI. Fig. 7.), so kann man schon aus der Anzahl auf den Körper zurückschliefsen. Wenn (Fig. 7.) π das Dihexaeder ist, von dem wir ausgehen, so liegen

unter π noch zwei andere Dihexaeder (n und ν), die zu derselben ersten Ordnung gehören, bis wir zur Säule l' gelangen; alle Flächen von l' über ν nach n und x liegen in einer und derselben Vertikalzone, zu welcher auch die Gradendfläche o' gehört; von den Dihexaedern 2ter Ordnung ist nur r vorhanden, das in die Diagonalzone von n fällt, weil n die Endkanten von r abstumpft. Zwischen r und l'' sehen wir nun noch die Flächen x und w liegen, denn sie stumpfen die Kante l'/r ab, und zwar über jeder l' sowohl zwei w, als auch zwei x, daher liegen in jedem Sextanten zwei, sie müssen einem 6 und 6kantner angehören. Denn es machen z. B. die w sechs gleiche Kanten über den Säulenkanten l''/l' und sechs gleiche Kanten über den Säulenflächen l', welche durch die Dihexaederflächen ν abgestumpft sind.

Die Hemiedrie des sechsgliedrigen Systemes.

Da der 6 und 6kantner der allgemeinste Körper des 6gliedrigen Systemes ist, so kann man auch auf ihn wieder das bekannte Gesetz der Hemiedrie anwenden.

Lassen wir, analog dem 4gliedrigen Systeme, zuerst je zwei Flächen über dem eingeschriebenen Dihexaeder gelegen, verschwinden (Tab. IV. Fig. 71.) und die den verschwindenden je zwei anliegenden wachsen, so bekommen wir einen 3 und 3kantner. Es leuchtet diefs aus Fig. 71. unmittelbar ein. Denn wachsen z. B. die um c gelagerten 3 Paare schwarzer Flächen, von denen in der Figur nur zwei Paare sichtbar sind, so werden die zwischen je zwei schwarzen Flächen liegenden Endkanten e' bleiben (also $3e'$ bleiben), anstatt der drei zwischen den weifsen Flächen liegenden e' entstehen durch Ausdehnung der schwarzen drei neue Kanten, so dafs sich eine $3+3$kantige Endecke o bilden mufs. Der Seitenecken würden über den sechs verschwindenden weifsen Paaren ebenfalls sechs $2+1+1$kan-

tige unter sich gleiche entstehen. Denn das untere schwarze Paar bildet mit den obern beiden in den Ecken anstofsenden schwarzen Flächen zwei gleiche schiefliegende Kanten, die untere e' bleibt, über der obern verschwindenden e' entsteht eine neue, daher 2+1+1, der Körper mufs ein 3+3kantner sein (Tab. VI. Fig. 6.). Würde man umgekehrt die weifsen Flächen wachsen lassen, so bildete sich ein ganz gleicher 3 und 3kantner; und dächte man sie beide zugleich wachsen, so entstände ein 6+6kantner mit einer 2+1flächigen Pyramide auf jeder Fläche. Daraus folgt die schon oben besprochene Ansicht, dafs man den 6+6kantner aus der Durchdringung von zwei gleichen 3+3kantnern entstanden ansehen könne, oder umgekehrt den 3+3kantner als Hälftflächner des 6+6kantners.

Lassen wir nur eine Fläche des 6+6kantners wachsen (Tab. IV. Fig. 72.) und die 3 anliegenden verschwinden, so entsteht ein *gedrehtes Dihexaeder*. Denn wachsen z. B. die schwarzen Flächen, so müssen über den verschwindenden 6 weifsen gleiche Kanten entstehen, also lagern sich um jede Endecke (c und c') 6 gleiche Kanten. Allein die 6 obern Endkanten stofsen mit den 6 untern nicht in ein und derselben Seitenecke zusammen, sondern die obern Kanten stofsen gegen die Mitte der untern Fläche, und umgekehrt. Daher erhalten wir 12 unter sich gleiche 2+1kantige Seitenecken im Zickzack liegend, die 1 den gleichen Endkanten, die 2 den Kanten entsprechend, welche jede schwarze mit den 2 an ihrer Basis anstofsenden Flächen macht. Die obere um c gelagerte Flächenhälfte ist der untern um c' gelagerten genau kongruent, allein die eine gegen die andere um einen halben Sextanten (30^0) verdreht, daher der Name. Aus demselben Grunde kann aber auch keine Fläche der andern parallel gehen, daher nennt man diese *Hemiedrie* auch die *geneigtflächige*. Selbstständig tritt sie nie auf, sondern nur dem 6gliedrigen

Systeme untergeordnet. Diese Art von Hemiedrie zu erkennen, darf man nur beherzigen, dafs aus jedem 6+6-kantner möglicher Weise zweierlei *gedrehte Dihexaeder* hervorgehen (die mit schwarzen und die mit weifsen Flächen). Stellt man ein solches Dihexaeder aufrecht (gleichviel ob c oder c' oben ist), so werden die schwarzen Flächen stets auf der rechten Seite des Sextanten sich finden, die weifsen auf der linken; man unterscheidet darnach rechts und links gedrehte Dihexaeder. Treten solche Hälftflächner an einem 6gliedrigen Körper untergeordnet auf (z. B. Fig. 7. Tab. VI.), so werden die rechts gedrehten Dihexaederflächen nur die von den Säulenkanten d/d rechts gelegenen Kanten s/d abstumpfen können, die zur Linken gelegenen nicht abgestumpft sein, beim links gedrehten nur die zur Linken gelegenen Kanten, es findet also nur eine einseitige Abstumpfung der Kanten Statt (siehe das Beispiel des Quarzes).

Wählt man endlich die wachsenden Flächen so, dafs die obere wachsende die untere wachsende mit einer Seite begränzt, wie Fig. 73. Tab. IV. darstellt, so bekommen wir ein gewöhnliches Dihexaeder. Vergleicht man jedoch diefs Dihexaeder in Rücksicht auf seine Lage mit dem eingeschriebenen 6+6kantner und dem erstern stumpfern Dihexaeder, so leuchtet ein, dafs es weder zur 1sten noch zur 2ten Ordnung von Dihexaedern gehören kann, sondern dafs seine Flächen zwischen beiden liegen, es ist also ein *Dihexaeder der Zwischenstellung*. Man darf nur ein Dihexaeder π und sein nächstes stumpferes p projiciren, dann von dem zwischenliegenden 6+6kantner die eine Hälfte der Sektionslinien ausdehnen, so sieht man, dafs von dem dadurch entstehenden regulären Sechsecke die einzelnen Sektionslinien, folglich auch die Seiten, zwischen den π und p liegen müssen. Dihexaeder von dieser Stellung sind bis jetzt wohl noch nicht beobachtet,

Berechnung der Zonenpunkte des 3 und 6gliedrigen Systemes (Tab. VI. Fig. 1.).

Da die 3 gleichen Seitenaxen a (a, x, y) sich unter 60° schneiden, so kommen in der Projektionsfigur eine Menge gleichseitiger Dreiecke vor, welche zur leichten Bestimmung der Zonenpunkte und Axenschnitte wesentliche Dienste leisten. Eben so häufig erscheint auch das Perpendikel os, im gleichseitigen Dreiecke oay vom Mittelpunkte der Projektionsfigur zur Mitte der Dreiecksseite ay gezogen. Das Perpendikel liegt in der Sektionslinie d', und da 3 solcher Sektionslinien vorhanden sind, so kann man sechs Mal von o aus die Einheit os auf den d' abtragen. Nehmen wir diese os zur Einheit und nennen sie s, so werden wir mit a und s jede mögliche Linienlänge durch einfache Proportion finden können. Dennoch ist es sehr wünschenswerth, zur Auffindung der Zonenpunkte einen direkten Weg einschlagen zu können.

Zu dem Ende zeichnen wir irgend eine Axe aus, z. B. $a \ldots a'$, und lassen auf dieser $oa = oa'$, wie immer, die Axeneinheit sein. Auf dieses a steht die zwischen x und y liegende s senkrecht. Nehmen wir dieses s zur zweiten Hauptaxe, so bilden a, s und c ein rechtwinkliches Axenkreuz, und wir können jetzt dieselben Zonenpunktgesetze, welche A. §. 69 73. entwickelt wurden, auf unsere 3gliedrige Projektionsfigur anwenden. Die Gesetze erlangen noch eine besondere Einfachheit, wenn wir nicht s, sondern $2s$ zur Einheit nehmen. Wir wollen der Gleichförmigkeit mit jenen Zonengesetzen $2s = b$ setzen. Alsdann haben wir den grofsen Vortheil, dafs die beiden übrigen Axen x und y zu Sektionslinien der Kantenzonenpunkte (A. §. 71.) werden. Denn ziehen wir z. B. durch den Punkt y eine Linie der b und eine andere der a parallel, so bekommt der Zonenpunkt y das Zeichen $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$, er ist also ein Kantenzonenpunkt; der Zonenpunkt $d.l'$, wel-

cher vom Mittelpunkte auf Axe y um $2a$ entfernt ist, das Zeichen $(\frac{a}{1} + \frac{b}{1})$. Ganz so verhält es sich mit den in Axe x gelegenen Punkten. Wir dürfen jezt nur den A. §. 72. wieder ins Gedächtnifs rufen, um durch einfache Subtraktion und Addition die Axenausdrücke zu finden.

Verbinden wir z. B. den Punkt x mit $\frac{y}{2}$, wie durch die Sektionslinie π' geschehen, so hat der Punkt x auf seine rechtwinklichen Axen a und b bezogen das Zeichen $(\frac{a}{2} + \frac{b'}{2})$; der Punkt $\frac{y}{2}$ aber den Ausdruck $(\frac{a}{4} + \frac{b}{4})$. Denn wir brauchen, um den Kantenzonenausdruck zu bekommen, die Axenlängen nur zu halbiren, also $\frac{x}{n}$ wird zu $\frac{x}{2n}$ und $\frac{y}{n}$ zu $\frac{y}{2n}$. Folglich ergibt sich der Axenausdruck von π' in $a = \frac{2a}{4+2} = \frac{a}{3}$, aber in $b = \frac{2b}{4-2} = b$, so dafs $\pi' = \overline{\underline{|\tfrac{1}{3}a : b|}}$. Uebertragen wir diefs in unsere gewöhnlichen Ausdrücke, so ergibt sich

$$\pi' = \overline{\underline{|\tfrac{1}{2}y : \tfrac{1}{3}a : x|}} = \overline{\underline{|\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a : a|}}.$$

Es versteht sich nun weiter von selbst, dafs so gut wie wir a als Hauptaxe herausgriffen, wir jetzt auch y oder x wählen können, und zur zweiten Hauptaxe b die auf y oder x senkrecht stehenden s. Ist also y die eine Axe, folglich die zwischen x und a liegende s die Axe b, so wollen wir suchen, wie obiges π' die neue b schneidet. Da jetzt in a und x die Kantenzonenpunkte liegen, so hat der Durchschnittspunkt π' mit a, der von o um $\frac{a}{3}$ entfernt liegt, das Zeichen $(\frac{y}{6} + \frac{b}{6})$; der Durchschnittspunkt von π' mit x, welcher von o um a entfernt ist, das Zeichen

$(\frac{y'}{2} + \frac{b}{2})$; folglich wird der Schnitt von π' mit b, als der zwischen den Kantenzonenlinien liegenden Axe:

$$= \frac{2}{6+2} b = \frac{b}{4} = \frac{s}{2}.$$

Nehmen wir endlich x und die darauf rechtwinkliche s als Axen, so ist der Schnitt von π' mit b:

$$= \frac{2b}{6+4} = \frac{b}{5} = \frac{2s}{5}.$$

Aus allen ergibt sich, dafs das vollständige Zeichen von

$$\pi' = \left| x : \frac{s}{2} : \frac{a}{3} : \frac{2s}{5} : \frac{y}{2} : 2s \right|$$

werden mufs, oder wenn wir in jede Axe a schreiben

$$\pi' = \left| a : \frac{s}{2} : \frac{a}{3} : \frac{2s}{5} : \frac{a}{2} : 2s \right|.$$

Bleiben wir jedoch zur leichtern Unterscheidung bei ersterm Zeichen stehen, so leuchtet ein, dafs jede dieser 6 Axen von ihrer anliegenden um 30^0 entfernt ist; demnach steht die zwischen a und y gelegene s auf x senkrecht, in den Axen a und y liegen daher die Kantenzonenpunkte. Wollen wir also den Ausdruck für das zwischen $\frac{a}{3}$ und $\frac{y}{2}$ liegende s finden, so ist er $\frac{2}{3+2}s$; für x aber $\frac{2}{3-2}x = 2x$. Allein wir müssen hier bedenken, dafs wenn wir die Kantenzonenpunkte $\frac{a}{3}$ und $\frac{y}{2}$ setzen, wir nicht $2s$ zur Axeneinheit b nehmen, sondern nur s. Ist aber s die Axeneinheit b, so müssen wir die zweite Axeneinheit x auch halbiren, so dafs also $\frac{1}{2}x$ die neue Einheit wäre, dann würde auch das Zonengesetz $\frac{2}{3-2}(\frac{1}{2}x) = 2(\frac{1}{2}x) = x$ stimmen. Nach derselben Regel finden wir das zwischen x und $\frac{a}{3}$ liegende Zeichen $= \frac{2}{3+1}s = \frac{s}{2}$. Um end-

lich noch den Ausdruck des dritten s zu finden, welches auf a senkrecht steht, vergesse man nicht, dafs für das zwischen liegende s die Axe x negativ genommen werden mufs, also erhalten wir $\frac{2}{2-1}s = 2s$.

Haben wir also ganz allgemein ein Linienzeichen

$$\left|\frac{a}{m} : \frac{x}{n} : \frac{y}{p}\right|,$$

so mufs das vollständige Zeichen werden:

$$\left|\frac{a}{m} : \frac{2s}{m+n} : \frac{x}{n} : \frac{2s}{n+p} : \frac{y}{p} : \frac{2s}{p-m}\right|.$$

Setzen wir darin $m=1$, so geht die allgemeine Linie durch die Axeneinheit a; schneidet sie die x noch in $\frac{1}{n}$, so mufs sie die y in $\frac{y}{n-1}$ schneiden. Denn ist a die eine Axe und das darauf senkrechte s die andere, auf der wir $2s=b$ setzen, so wird $\frac{x}{n}$ als Kantenzonenpunkt auf a und b bezogen $\frac{x}{2n}$. Obige allgemeine Linie geht also durch Axe a und Kantenzonenpunkt $\frac{x}{2n}$, folglich mufs sie (A. §. 72. *Zusatz, Fall* 1.) die zwischen y' und x gelegene Axe b in $\frac{1}{2n-1}$ treffen. Träfe sie die y' in $\frac{1}{q}$, so würde $\frac{b}{2n-1}$ zwischen den Kantenzonenpunkten $\frac{x}{2n}$ und $\frac{y'}{q}$ liegen, also wäre nach A §. 72.

$$\frac{2}{2n+q} = \frac{1}{2n-1}$$
$$4n-2 = 2n+q$$
$$2n-2 = q,$$

und y' erhielte das Vorzeichen $\frac{1}{2n-2}$. Diefs wäre aber der Kantenzonenausdruck, welcher in seinem sechsgliedrigen

Axenwerth $\frac{1}{n-1}$ beträgt, so dafs die fragliche Linie den Ausdruck $a : \frac{x}{n} : \frac{y}{n-1}$ bekommt.

Der vollständige Ausdruck einer solchen Linie lautet daher:

$$\left| a : \frac{2s}{n+1} : \frac{x}{n} : \frac{2s}{2n-1} : \frac{y}{n-1} : \frac{2s}{n-2} \right|,$$

oder die Hauptaxen mit den Buchstaben a geschrieben

$$\left| a : \frac{2s}{n+1} : \frac{a}{n} : \frac{2s}{2n-1} : \frac{a}{n-1} : \frac{2s}{n-2} \right|.$$

Diefs ist das allgemeine Zeichen, welches Prof. Weifs zuerst in der *Abhandlung der Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1816 und 1817 entwickelt hat, und worauf sich seine Darstellung des 3 und 6gliedrigen Systemes gründet (siehe dieselben Schriften vom Jahre 1822 und 1823). Wenn wir jenen Ausdruck mit unserer Fig. 1. Tab. VI. in der Hand studiren, und die Gesetze über die Zonenpunkte der dreiaxigen Systeme recht festhalten, so kann keine Schwierigkeit sich uns entgegenstellen. Beispiele im rechnenden Theile werden diefs beweisen.

Beispiel zum rhomboedrischen Systeme.

Kalkspath.

Man pflegt beim Kalkspathe von einem Rhomboeder auszugehen, dessen Endkanten 105° 5′, dessen Seitenkanten folglich das Complement 74° 55′ betragen. Zwar kommt dieses Rhomboeder nur höchst selten als selbstständiger Krystallkörper vor, sondern es erscheint nur untergeordnet. Allein es entspricht ihm ein sehr ausgezeichneter Blätterbruch, nach welchem der Kalkspath stets bei einem

Schlage in glänzendflächige Rhomboeder zerspringt: daher sahe es Hauy als die Grundform (forme primitive) des Kalkspathsystemes an.

Es gibt noch eine ganze Reihe kalkspathähnlicher Mineralien, bei welchen umgekehrt ein Rhomboeder mit dem Kalkspathrhomboeder sehr nahe liegenden Winkeln vor allen andern Formen selbstständig auftritt, als da sind:

Dolomitspath,	Endkantenwinkel	106° 15′
Manganspath,	„	106° 51′
Spatheisenstein,	„	107°
Mesitinspath,	„	107° 14′
Talkspath,	„	107° 22′
Galmei	„	107° 40′

und mehrere andere. Ihr Krystallsystem entwickelt sich demnach auf ganz gleiche Weise, wie das des Kalkspathes.

Stellt man das Kalkspathrhomboeder im Gleichgewicht (*h* Tab. VI. Fig. 3.) nach seiner gleichkantigen Endecke aufrecht, so wird die Hauptaxe *c* die beiden Endecken, und jede der Seitenaxen *a* die Mitte zweier sich gegenüberliegenden Seitenkanten verbinden müssen. Das Rhomboeder, als Rhomboeder 1ster Ordnung, erhält also den Ausdruck

$$h = \underline{\overline{|c : a : a : \infty a|}}.$$

Die Gradendfläche o', welche die Endecke des Rhomboeders abstumpft, fehlt nicht; sie ist matt, und tritt sie, wie beim Talkspath, allein mit dem Rhomboeder *h* auf, so erscheint sie als ein gleichseitiges Dreieck. Alle 4 Flächen $(3h + o')$ zusammengenommen bilden aber das bekannte 3gliedrige Oktaid. Der Ausdruck ist

$$o = \underline{\overline{|c : \infty a : \infty a : \infty a|}}.$$

In der Diagonalkantenzone des Rhomboeders *h* findet sich ein anderes Rhomboeder *o*, denn wir sehen von *o* über *h* nach *o* eine Zone, der Blätterbruch *h* stumpft also die Endkante des Rhomboeders *o* ab. Es ist diefs das

erste schärfere Rhomboeder von h, und würden die Flächen o sich bis zum Verschwinden aller übrigen ausdehnen, so bekämen wir ein schärferes Rhomboeder, der nebenstehenden Fig. 2. ähnlich. Legen wir diesem Rhomboeder (Fig. 2.) Axen unter, so wird die Hauptaxe c verhältnifsmäfsig viel gröfser sein, als die Nebenaxe a (verglichen mit dem Rhomboeder h), woher der Name schärferes Rhomboeder kommt. Das Rhomboeder o ist aber 2ter Ordnung, denn seine Flächen liegen unter den Kanten des Rhomboeders 1ster Ordnung (h). Suchen wir den Ausdruck auf der Projektionsfigur (Tab. VI. Fig. 1.) so ergibt sich:

$$o = 0\,\overline{\underline{|c : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}a : \infty a|}},$$

worin die vorstehende Null das Zeichen 2ter Ordnung andeutet.

Auch das erste stumpfere Rhomboeder (d), welches die Endkanten von h abstumpft, erscheint häufig. Würden sich die Flächen zu einer selbstständigen Figur ausdehnen, so entstünde ein stumpfes Rhomboeder der Fig. 8. ähnlich, aus welcher hervorgeht, dafs die Hauptaxe $c \ldots c'$ durch ihre Länge nicht mehr die Seitenaxen (a) so weit überwiegt, wie es in Fig. 2. der Fall war. Daher heifst es auch stumpferes Oktaeder, es ist 2ter Ordnung mit dem Zeichen

$$d = 0\,\overline{\underline{|c : 2a : 2a : \infty a|}}.$$

Vergleicht man die 3 Rhomboeder (Fig. 2., Fig. 8. und h in Fig. 3.) mit einander, so steht die Endkante des Hauptrhomboeders (h) zwischen den Endkanten von o und d; denn der Endkantenwinkel von o ist kleiner, und der Endkantenwinkel von d gröfser, als der von h. Dasselbe gilt auch von den ebenen um die Endecken c gelagerten Winkeln.

Die zweite sechsseitige Säule (d'), welche die Seitenkanten des Rhomboeders h, sowie auch der Rhomboeder

d und o, abstumpfen würde, fehlt nicht, sie findet sich öfter, wiewohl untergeordnet, ihr Ausdruck ist

$$d' = \underline{\left|\infty c : a : \tfrac{1}{2}a : a\right|}.$$

Diese Säule gehört keiner der beiden Ordnungen an, da ihre Sektionslinien vollzählig erscheinen, wir brauchen daher ihrem Ausdrucke kein Unterscheidungsmerkmal hinzuzufügen. Dafs diese Säule die Seitenkanten sämmtlicher Rhomboeder 1ster und 2ter Ordnung abstumpfen müsse, folgt aus den Sektionslinien der Projektionsfigur (Tab. VI. Fig. 1.). Denn wir sehen, dafs die d' sich zu den Sektionslinien aller Rhomboeder gleichmäfsig verhält. Die d' liegt z. B. in der Endkantenzone von h/h, aber in der Diagonalzone der dritten h, welche sie halbirt; ebenso in der Endkantenzone von o/o und in der Diagonalzone der dritten o, welche sie halbirt etc.

Vergleichen wir den Zonenzusammenhang sämmtlicher Flächen ($3h + 3o + o' + 3d + 3d'$, Summa 13 Flächen) unter einander, so leuchtet ein, dafs sie mit den 3 Körpern Hexaid, Oktaid und Dodekaid gleiche Zonenpunkte und Sektionslinien zeigen, und lassen wir die Krystallräume mit gleichen Buchstaben sich selbstständig ausdehnen, so bekommen wir ein specielles Hexaid, Oktaid und Dodekaid. In dem Grade, als das Rhomboeder h sich mit seinen Endkantenwinkeln von 105° 5' dem Würfel mit 90° nähert, in dem Grade nähern sich die Körper den regulären. Beim Kalkspath ist die Differenz der Winkel noch bedeutend, viel näher tritt schon das Rhomboeder des Chabasits, mit einem Endkantenwinkel von $94\frac{1}{2}$°. Da nun bei letzterm Mineral aufser o' alle übrigen Flächen gewöhnlich erscheinen, so mufs es deshalb einem regulären Systeme sehr ähnlich sehen, nur dafs die Flächengruppirung anders ist.

Aufser diesen Flächen treten nun ferner häufig die Säulenflächen der *ersten sechsseitigen Säule* auf (l'), ihre Sektionslinien entsprechen den Axen des Systemes, weil

durch die erste Säule die Kanten der zweiten Säule gerade abgestumpft werden müssen. Am Hauptrhomboeder (h), so wie an allen Rhomboedern 1ster und 2ter Ordnung stumpft die erste Säule die Seitenecken ab. Denn auf der Projektionsfigur sieht man, dafs die Säulenfläche (l'') in die Kante keines einzigen Rhomboeders fällt. Tritt aber zu einem Hexaide eine vierte Fläche, die nicht in der Kantenzone des Hexaides liegt, so mufs sie die Hexaidecke abstumpfen (A. §. 48.). Zugleich sehen wir, dafs die Sektionslinien l, l'', o und d in einer Zone liegen; die Zone zwischen h, o und d ist aber in Fig. 3. (Tab. VI.) durch Kantenparallelität sichtbar; zwischen den Sektionslinien h und o liegt die l'', folglich mufs die Säulenfläche l'' die Kante zwischen h und o abstumpfen. Die Säule kommt häufig mit der Gradendfläche (o) selbstständig vor, oder mit einem aufgesetzten Rhomboeder, z. B. dem ersten stumpfern (Fig. 9. Tab. VI.). Die Rhomboederflächen bilden dann symmetrische Pentagone, die Flächen abwechselnd auf die Säulenflächen aufgesetzt, ebenso auch die Endkanten. Wenn aber am obern Ende der Säulenfläche eine Kante aufgesetzt ist, so entspricht ihr am untern Ende eine Fläche, und umgekehrt; denn es müssen ja je drei d bei gehöriger Verlängerung über der Säulenfläche eine Seitenecke bilden. Alle Rhomboeder, mögen sie 1ster oder 2ter Ordnung sein, müssen in Verbindung mit der ersten Säule so erscheinen. Dadurch läfst sich leicht die zweite unterscheiden (Fig. 4.), welche mit dem Rhomboeder Dodekaide bildet, also ist Fläche auf Säulenkante aufgesetzt. Die Säule erhält den Ausdruck

$$l'' = \overline{\underline{|\infty c : a : a : \infty a|}}.$$

Ein Hauptkörper des Kalkspathes ist der 3 und 3kantner

$$\pi' = \overline{\underline{|c : a : \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}a|}}.$$

Da er in der Kantenzone von h/h innerhalb der Sektionslinien liegt, so schärft er die Seitenkanten des Rhomboe

ders h zu. In Fig. 10. wird diefs deutlich. Denn tritt zum 3 und 3kantner der Blätterbruch h (dem Hauptrhomboeder entsprechend), so schärft derselbe die Endecken dergestalt dreiflächig zu, dafs die Kanten h/π' mit den Seitenkanten des 3 und 3kantners parallel laufen. Würden sich also die h zu einem mehr selbstständigen Rhomboeder ausdehnen, so würden die π', wie sie jetzt vorherrschend, ebenso untergeordnet an den Seitenkanten auftreten. Träten die Rhomboeder d und o noch hinzu, so würden die d, wie in der Fig. 3., die Endkanten von h, die o aber die unter der Endkante h/h liegende schärfere Endkante π'/π' des 3 und 3kantner abstumpfen. Der Grund davon leuchtet sogleich aus der Projektion ein; denn wir sehen hier z. B. zwischen Axe x und a durch zwei der π' eine Kante gebildet, die scharfe Endkante des 3 und 3kantner, in deren Zonenpunkte die Sektionslinie o liegt. (Der Anfänger mag durch die Buchstaben immer an die gleichbenannten Flächen des regulären Systemes erinnert werden!)

Weiter könnten wir fragen, wie die beiden Säulen an diesem 3 und 3kantner auftreten müssen. Die zweite Säule, welche die Seitenkanten der Rhomboeder abstumpft, stumpft folglich auch die Seitenkanten des 3 und 3kantners ab, denn sie liegt ja auf der Projektion mit $h\pi'\pi'h$ in einer Zone zwischen π' und π'. Aus der Lage der zweiten Säule folgt schon, dafs die erste Säule die Seitenecken abstumpfen müsse. Man denke sich nur das Rhomboeder o hinzu, so mufs ja die erste Säule in der Zone zwischeu h und o liegen.

Da es schon aus der Zahl 3 folgt, dafs die Abstumpfungsflächen der gleichen Endkanten ein Rhomboeder bilden, so kann man weiter fragen, welchen Ausdruck bekommt das in den stumpfen Endkanten gelegene Rhomboeder (welches die stumpfe Endkante gerade abstumpft). Wie ersichtlich, so hängt der Ausdruck von der stumpfen

Endkante π'/π' ab, welche z. B. zwischen den Axen a und y liegt. Da π' die a in $\frac{1}{2}$ und die y in $\frac{1}{3}$ schneidet, so mufs s das Vorzeichen $\dfrac{2}{3+2} = \dfrac{2}{5}$ erhalten. Eine Linie also, welche durch $\dfrac{2s}{5}$ der Axe x parallel geht, gibt eine Rhomboederfläche

$$\overline{|c : \tfrac{2}{5}a : \tfrac{2}{5}a : \infty a|},$$

die beim Kalkspathe gar nicht selten erscheint. Noch leichter folgt das Rhomboeder, welches die scharfen Endkanten gerade abstumpft, denn es fällt mit o zusammen.

Auf diese Weise haben wir alle Flächen nachgewiesen, welche die Kanten und Ecken des gewöhnlich vorkommenden 3 und 3kantners abstumpfen.

Die Fläche π kommt zwar selten vor, doch wird sie schon von Hauy mit gleichen Buchstaben bezeichnet. Ihr Ausdruck ist, wie aus Tab. VI. folgt:

$$\pi = \overline{|c : 3a : \tfrac{3}{2}a : 3a|} = \overline{|\tfrac{1}{3}c : a : \tfrac{1}{2}a : a|}.$$

Die Fläche mufs die Endkante des Hauptrhomboeders (h) zuschärfen, weil die Sektionslinien h von den Sektionslinien π eingeschlossen sind. Sie gehört einem Dihexaeder an, wie die punktirten Projektionslinien zeigen. Würden sich die π und π' zu einer selbstständigen Figur ausdehnen, so erhielten wir ein Pyramidenrhomboeder, und zwar das Analogon des gewöhnlichen Pyramidenwürfels $\overline{|a : \tfrac{1}{2}a : \infty a|}$. Doch dürfte diefs beim Kalkspathe kaum vorkommen. Sondern anstatt π findet sich gewöhnlich ein 3 und 3kantner, der ebenfalls die Endkanten des Hauptrhomboeders zuschärft. Seine Sektionslinie liegt zwischen h und π, und mit dem Zeichen $\overline{|2a : \tfrac{4}{3}y : 4x'|}$ versehen geht sie durch eine Menge linienreicher Zonenpunkte, wodurch ihr oftmaliges Auftreten schon verbürgt ist. Die zugehörige Fläche erhält also den Ausdruck

$|c : 2a : \frac{4}{3}a : 4a| = |\frac{1}{4}c : a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a|$.

Die Sektionslinie dieser Fläche geht mit der Sektionslinie π' parallel, die beiden zugehörigen Flächen müssen daher mit der Gradendfläche o' in eine Zone (Vertikalzone) fallen. Dächten wir aber, dafs sich beide 3 und 3kantner ausdehnten, so erhielten wir ebenfalls ein Pyramidenrhomboeder, was in der That gar nicht selten erscheint. Von den vorigen unterscheidet sich dasselbe aber wesentlich; denn wollten wir es auf die 3 Axen des Oktaides $(3o + o')$ beziehen, so bekämen die Flächen ungleiche Ausdrücke, während die vorigen gleiche bekamen.

Der 3 und 3kantner $l' = |\frac{1}{2}c : a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a|$ kommt beim Kalkspath selten vor, beim Rothgiltigerz ist er sehr häufig aber 2ter Ordnung; verbände sich mit ihm die erste sechsseitige Säule l', und ein zweites stumpferes Romboeder, so erhielten wir einen dem Leucitoeder analogen Körper. Träte zum gewöhnlichen 3 und 3kantner das erste stumpfere Oktaeder und die erste Säule, so würden wir ebenfalls einen Körper mit 24 Trapezoidflächen bekommen, einen schon von Hauy abgebildeten Körper; doch die Flächen müfsten auch hier, auf die 3 Axen des Oktaides $(3o + o')$ bezogen verschiedene Ausdrücke bekommen.

Auch eine 6+6kantige Säule $g = |\infty c : a : \frac{1}{5}a : \frac{1}{4}a|$ erscheint beim Kalkspath, die also dem 48flächner $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a|$ entsprechen würde, so dafs wir neben den Rhomboedern und 3 und 3kantnern alle Säulen und ein Dihexaeder finden.

Da der Kalkspath ungemein formenreich ist, so kann es unsere Absicht nicht sein, alle Einzelnheiten hier aufzuführen. Daher wollen wir nur wenige Reihen hervorheben.

Die Reihe der Rhomboeder. Vom Rhomboeder des Blätterbruchs (h) findet sich das erste, zweite und dritte

schärfere, so wie das erste, zweite und vierte stumpfere. Die zugehörigen Flächen werden also bei gleicher Axe c die Seitenaxen in $\frac{a'}{8}$, $\frac{a}{4}$, $\frac{a'}{2}$, a, $2a'$, $4a$, $16a$ schneiden, wo die gestrichelten der zweiten, die übrigen der ersten Ordnung angehören. Nimmt man dazu die Säule $\frac{a}{\infty}$ und die Gradendfläche ∞a, welche beiden Ordnungen gemein sind, so ist damit die Reihe geschlossen.

Eine andere Reihe hat das Rhomboeder $|c : \frac{2}{5}a : \frac{2}{5}a : \infty a|$, welches die stumpfen Endkanten des 3 und 3kantner π' abstumpft, zum Hauptkörper. Von ihm ist das erste stumpfere und erste schärfere beobachtet, welche also bei gleicher Axe c die Seitenaxen in $\frac{4}{5}a'$ und $\frac{1}{5}a'$ schneiden würden, oder vollständig geschrieben

$$0 \quad |c : \tfrac{4}{5}a : \tfrac{4}{5}a : \infty a|$$

$$0 \quad |c : \tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{5}a : \infty a|.$$

Lenken wir noch kurz unsere Aufmerksamkeit darauf, wie beide Rhomboederreihen am gewöhnlichen 3 und 3kantner vorkommen müssen, so müssen wir nur die Zonenpunkte desselben ins Auge fassen. Ein Zonenpunkt der stumpfen Endkanten liegt z. B. zwischen a und y in $\frac{1}{5}s$, folglich der der scharfen im nebenliegenden Sextanten xa, sowie im $x'y$, beide vom Mittelpunkte um $\frac{s}{2}$ entfernt. Verbinden wir daher diese letztern beiden Punkte der scharfen Kante, so mufs a und y in $\frac{1}{4}$ geschnitten werden. Denn verbinden wir auf denselben s den Punkt $2s$ mit $2s$, so wird a und y in der Einheit getroffen, folglich durch Linie $\frac{s}{2}$ mit $\frac{s}{2}$ in $\frac{1}{4}$. Das Rhomboeder in je zwei scharfen Endkanten des 3 und 3kantner π' gelegen, ist also das 2te schärfere von h, folglich mufs das 1ste schärfere (o), welches die Endkanten des zweiten schärferen abstumpft, zu gleicher Zeit die

scharfen Endkanten von π' abstumpfen. Die Abstumpfungsfläche der stumpfen Endkante von π' war $\overline{|c:\frac{2}{5}a:\frac{2}{5}a:\infty a|}$, das erste schärfere dieses, 0 $\overline{|c:\frac{1}{5}a:\frac{1}{5}a:\infty a|}$, fällt also in die Diagonalzone desselben, liegt folglich in zwei stumpfen Endkanten der π', während das erste stumpfere desselben auf die scharfe Kante von π' aufgesetzt erscheinen mufs.

Noch eine dritte Reihe von Rhomboedern ist auszuzeichnen; sie beginnt mit einem Rhomboeder $\overline{|c:\frac{1}{7}a:\frac{1}{7}a:\infty a|}$, und von ihm erscheint das erste schärfere nebst dem ersten und zweiten stumpfern; also bei gleichem c wird a in $\frac{1}{14}$, $\frac{2}{7}$ und $\frac{4}{7}$ geschnitten. Mit dem 3 und 3kantner $\overline{|c:\frac{1}{2}a:\frac{1}{5}a:\frac{1}{3}a|}$ stehen sie in engster Beziehung. Dieser fällt nemlich in die Kantenzone von h, denn legen wir durch $\frac{x}{2}$ und $\frac{y}{3}$ eine Sektionslinie, so mufs diese die a in $\frac{1}{2+3} = \frac{1}{5}$ schneiden, und zugleich auch in die zwischen x' und y liegende Kantenzone von h fallen. Die zwischen $\frac{x}{2}$ und $\frac{a}{5}$ gelegene s wird also in $\frac{2}{2+5} = \frac{2}{7}$, die zwifchen $\frac{a}{5}$ und $\frac{y}{3}$ gelegene aber in $\frac{2}{5+3}$ geschnitten; in $\frac{2s}{7}$ liegt demnach die scharfe und in $\frac{2s}{8}$ die stumpfe Endkante des 3 und 3kantners. Die scharfe Endkante wird daher durch obiges Rhomboeder $\frac{1}{7}$ abgestumpft, während das erstere schärfere $\frac{1}{14}$ in je zwei scharfen Endkanten des 3 und 3kantners liegt.

Ausser diesen 3 Reihen kommen noch eine grofse Menge von Rhomboedern vor, deren Entwickelung wir übergehen; allein es wird sich kein einziges finden, das nicht in den Zonenzusammenhang der Fig. 1. Tab. VI. hineinpafste, d. h., dessen Sektionslinien nicht in vorhandene Zonenpunkte fielen.

Doch vor allen beachtenswerth sind noch einige Gegenrhomboeder. So findet sich z. B. gleich der Gegenkörper von h, $0\ |c:a:a:\infty a|$, dessen Sektionslinien zwischen $x'y$, $a'y'$ und ax liegen würden. Durchdrängen sich also beide (das Rhomboeder und Gegenrhomboeder), so erhielten wir ein vollständiges Dihexaeder. Ferner kommt das Gegenrhomboeder des 2ten schärfern vor, also $0\ |c:\frac{1}{4}a:\frac{1}{4}a:\infty|$, so wie auch noch $0\ |c:\frac{4}{7}a:\frac{4}{7}a:\infty a|$.

Bemerkenswerth ist es dabei, dafs mit diesen Gegenrhomboedern auch die Gegenkörper obiger beiden 3 und 3kantner auftreten, nemlich:

$$0\ |c:a:\tfrac{1}{2}a:\tfrac{1}{3}a| \text{ und } 0\ |c:\tfrac{1}{2}a:\tfrac{1}{5}a:\tfrac{1}{3}a|.$$

Letztere 3 und 3kantner verhalten sich zu den Gegenrhomboedern ganz wie erstere 3 und 3kantner sich zu den gleichnamigen (von denen die Rhomboeder die Gegenkörper sind) verhielten, nur werden die Sektionslinien beider Gruppen auf der Projektionsebene 60° (im Azimuth) gegen einander verdreht sein. Durchdringen sich die Dreiunddreikantner mit ihren Gegenkörpern, so entstehen 6 und 6kantner. Doch wie die Rhomboeder, so sind auch die 6 und 6kantner nicht gleich- sondern zweierleiflächig.

Die gröfste Mannigfaltigkeit findet sich bei den 3 und 3kantnern. Weiss in seiner klassischen Abhandlung über die *Theorie des Sechsundsechskantners und Dreiunddreikantners* (Abhandl. der Berliner Akad. 1823) hat allein aus der Kantenzone des Hauptrhomboeders (h) deren 20 durch Kritik begründet. Er theilt sie in 3 Abtheilungen, die durch unsere Projektion sich leicht auffassen lassen. Denn nehmen wir den zwischen x' und y liegenden Zonenpunkt $h.h$, so werden alle denkbaren Sektionslinien, welche durch diesen Zonenpunkt gehen sollen, zu beiden Seiten zwischen den Sektionslinien $d'...d'$ und $d...d$ liegen müssen. Alle diese unendlichen Sektionslinien wer-

den die drei Axen der Projektionsebene in der Ungleichheit schneiden müssen, als Dreiunddreikantnern angehören, ausgenommen die Sektionslinien des Rhomboeders h und des Dihexaeders π. Diese Ausnahmen bilden daher passende Abtheilungen:

1*ste Abtheilung,* zwischen der Säule d' und dem Haupt-Rhomboeder h;

2*te Abtheilung,* zwischen dem Rhomboeder h und dem Dihexaeder π;

3*te Abtheilung,* zwischen dem Dihexaeder π und dem ersten stumpfern Rhomboeder d.

Bereits sind fast alle 3 und 3kantner der *ersten Abtheilung* gekannt, welche den Kantenzonenpunkt h mit den vorhandenen Axenschnittpunkten auf x verbinden, also vom Zonenpunkte $h.h$ aus

die Sektionslinie nach $\frac{x}{3}$ gezogen, a in $\frac{1}{6+1}$ und y in $\frac{1}{7-3}$ schneidend, $= \left|\frac{x}{3} : \frac{a}{7} : \frac{y}{4}\right|$;

die Sektionslinie nach $\frac{x}{2}$ gezogen, a in $\frac{1}{4+1}$ und y in $\frac{1}{5-2}$ schneidend, $= \left|\frac{x}{2} : \frac{a}{5} : \frac{y}{3}\right|$;

die Sektionslinie nach $\frac{2x}{3}$ gezogen, a in $\frac{1}{\frac{6}{2}+1}$ und y in $\frac{1}{4-\frac{3}{2}}$ schneidend, $= \left|\frac{2x}{3} : \frac{a}{4} : \frac{2y}{5}\right|$;

die Sektionslinie nach $\frac{3x}{2}$ gezogen, a in $\frac{1}{\frac{4}{3}+1}$ und y in $\frac{1}{\frac{7}{3}-\frac{2}{3}}$ schneidend, $= \left|\frac{3x}{2} : \frac{3a}{7} : \frac{3y}{5}\right|$;

die Sektionslinie nach $2x$ gezogen, a in $\frac{1}{1+1}$ und y in $\frac{1}{2-\frac{1}{2}}$

schneidend, $= \left|\, 2x : \frac{a}{2} : \frac{2y}{3} \,\right|$;

die Sektionslinie nach $3x$ gezogen, a in $\frac{1}{\frac{2}{3}+1}$ und y in $\frac{1}{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}}$

schneidend, $= \left|\, 3x : \frac{3a}{5} : \frac{3y}{4} \,\right|$;

die Sektionslinie nach $4x$ gezogen, a in $\frac{1}{\frac{1}{2}+1}$ und y in $\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}$

schneidend, $= \left|\, 4x : \frac{2a}{3} : \frac{4y}{5} \,\right|$;

die Sektionslinie nach $5x$ gezogen, a in $\frac{1}{\frac{2}{5}+1}$ und y in $\frac{1}{\frac{7}{5}-\frac{1}{5}}$

schneidend, $= \left|\, 5x : \frac{5a}{7} : \frac{5y}{6} \,\right|$.

Alle diesen Sektionslinien zugehörigen Flächen schneiden c in der Einheit, wodurch sich der vollständige Flächenausdruck leicht ergibt. Zu gleicher Zeit bemerken wir, dafs alle Sektionslinien, welche die Axe x schneiden, zwischen den Sektionslinien d' und h liegen, also der 1*sten Abtheilung* angehören. Die zugehörigen Dreiunddreikantner sind alle so beschaffen, dafs eine ihrer stumpfen Endkanten zwischen a und y fällt, woraus die Lage der übrigen folgt. Denn die zwischen a und y liegende s ist immer kleiner, als die zwischen a und x; z. B. für

$\left|\, \frac{x}{3} : \frac{a}{7} : \frac{y}{4} \,\right|$ ist das erstere $\frac{2s}{7+4}$, das andere $\frac{2s}{7+3}$;

für $\left|\, 2x : \frac{a}{2} : \frac{2y}{3} \,\right|$ das erste $\frac{2s}{2+\frac{3}{2}} = \frac{4s}{7}$, das andere

$\frac{2s}{2+\frac{1}{2}} = \frac{4s}{5}$ etc.; dem gröſsern s gehört aber immer der kleinere, dem kleineren s der gröſsere Kantenwinkel an.

Ganz anders verhält es sich nun mit der *zweiten Abtheilung.* Da die hierhin gehörigen Sektionslinien zwischen h' und π liegen sollen, so können sie nicht die Axe x, sondern nur die entgegen gesetzte x' schneiden. Zwar ist diese Abtheilung weniger als die erste entwickelt, doch treten mehrere daraus auf. Es wird z. B. vom Kantenzonenpunkt $h.h$ aus

die Sektionslinie nach $5x'$ gezogen, a in $\frac{1}{\frac{2}{5}-1}$ und y in $\frac{1}{-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}}$

schneidend, $= \left|5x' : \frac{5a}{3} : \frac{5y}{4}\right|$;

die Sektionslinie nach $4x'$ gezogen, a in $\frac{1}{\frac{1}{2}-1}$ und y in $\frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$

schneidend, $= \left|4x' : 2a : \frac{4y}{3}\right|$.

Alle Drei und Dreikantner dieser 2ten Abtheilung werden die Endkanten des Hauptrhomboeders (h) zuschärfen, wenn die erste Abtheilung die Seitenkanten desselben zuschärfte. Dabei behalten sie noch die Eigenschaft bei, daſs zwischen ay die stumpfe, zwischen $x'y$ die scharfe Endkante liegt. Denn die s zwischen erstern ist

$$\frac{2s}{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}} = \frac{10s}{7} \text{ und } \frac{2s}{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}} = \frac{8s}{5};$$

zwischen letztern $\frac{2s}{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} = 2s$ und $\frac{2s}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 2s$, wie auch die Projektion zeigt; $2s$ ist aber gröſser als $\frac{10s}{7}$ und $\frac{8s}{5}$, daher zwischen ay die stumpfern Kanten.

Wenn die Sektionslinien der *zweiten Abtheilung* die Axe x' unter einer Verhältniſszahl, die *gröſser* ist als 3,

schneiden, so werden endlich die der *dritten Abtheilung* diese x *kleiner* als 3 und *gröfser* als 2 schneiden; denn da sie alle zwischen π und d liegen sollen, so dürfen sie weder mit π noch mit d zusammenfallen, wie dieses z. B. mit der Sektionslinie der Fall ist, die vom Zonenpunkte $h.h$ nach $\frac{5x'}{2}$ gezogen wird, sie schneidet die a in $\frac{1}{\frac{4}{5} - 1}$ und die y in $\frac{1}{-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}}$, folglich ihr Ausdruck

$$\left|\frac{5x'}{2} : 5a : \frac{5y}{3}\right|.$$

Wenn die Flächen der *ersten* und *zweiten Abtheilung* Sektionslinien hatten, die das s zwischen a und y in einem kleinern Verhältnisse schneiden mufsten, als das s zwischen x' und y (was schon aus der unmittelbaren Anschauung der Sektionslinien hervorgeht, da die Gränzlinie π erst beide s in der Gleichheit schneidet), so ist jetzt bei den Sektionslinien der *dritten Abtheilung* das Umgekehrte der Fall. Denn hier liegt das gröfsere s offenbar zwischen a und y. Daher mufs jetzt, entgegengesetzt allen vorigen, die *stumpfe Endkante* zwischen $x'y$, die *scharfe* zwischen ay liegen. Die 3 *und* 3*kantner dritter Abtheilung sind daher alle der* 2*ten Ordnung angehörig.*

Was von den 3 und 3kantnern des Hauptrhomboeders, gilt von denen aller Rhomboeder. Namentlich wären hier noch die 3 und 3kantner der Kantenzonen des 1sten stumpfern, 1sten und 2ten schärfern Rhomboeders zu erwähnen. Da das 1ste stumpfere und schärfere Rhomboeder der 2ten Ordnung angehören, so versteht sich, dafs alle 3 und 3kantner der ersten und zweiten Abtheilung ebenfalls der 2ten Ordnung angehören müssen, während die der dritten zur 1sten Ordnung zu zählen sind.

Jetzt werden sich mit Leichtigkeit die Fig. 10. und 11. auf Tab. VI. entwickeln lassen. Beginnen wir in Fig. 10.

mit dem Hauptrhomboeder h, so sehen wir zwischen der obern und untern h zwei Flächen π' und zwei Flächen z liegen, sie schärfen also die Seitenkanten des Rhomboeders zu, gehören mit h zur gleichen Ordnung und zur *ersten Abtheilung* der 3 und 3kantner. Eine selbstständige Deduktion der Flächen ist aus dem Rhomboeder nicht möglich, daher müssen wir vorläufig $\pi' = |c : x : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}y|$ $= |c : a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a|$ annehmen. Die stumpfen Kanten aller 3 und 3kantner erster Abtheilung liegen unter der Rhomboederfläche (also Kante π'/π' oberhalb r), die scharfen unter der Rhomboederkante. Die Rhomboederfläche r macht mit den π' Kanten, die auf π' mit den stumpfen Endkanten des 3 und 3kantners parallel gehen, daher ist r $= |c : \frac{1}{4}a : \frac{1}{4}y : \infty x| = |c : \frac{1}{4}a : \frac{1}{4}a : \infty a|$, also dem 2ten schärfern Rhomboeder angehörig. Dieses Rhomboeder r stumpft die stumpfe Endkante des 3 und 3kantners z ab, daher fallen die z in die Diagonalzone von r, d. h. z. B. in den Zonenpunkt, welchen die zwischen a und $\mathfrak{y}$ liegende s mit Sektionslinie r macht, der von o um $\frac{1}{4}s$ entfernt ist. Da eine solche z zugleich noch im zwischen x' und y gelegenen Kantenzonenpunkte h/h liegen mufs, der $2s$ von o entfernt ist, so darf ich nur das Lineal durch beide Punkte legen, um zu sehen, dafs x in $\frac{1}{2}$ geschnitten wird, folglich

$$z = |c : \tfrac{1}{2}x : \tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{3}y| = |c : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{3}a|.$$

Fläche l' stumpft die 2+1+1kantige Seitenecke des 3 und 3kantner z ab, und liegt mit h und r in einer Vertikalzone, sie ist daher die erste Säule

$$l' = |\infty c : a : a : \infty a|.$$

In Fig. 11. ist h das Hauptrhomboeder, o das erste schärfere Rhomboeder, also zur 2ten Ordnung gehörig, daher

$$o = 0\ |c : 2a : 2a : \infty a|.$$

Die Flächen π' schärfen die Seitenkanten des Rhomboeders h zu, gehören also zu den 3 und 3kantnern 1ster Ordnung und 1ster Abtheilung, sie sind mit den π' Fig. 10. gleich. Aber die f schärfen die Seitenkanten des Rhomboeders o zu, gehören daher mit dem Rhomboeder o zur 2ten Ordnung; sie haben ihre stumpfen Endkanten, wo die π ihre scharfen haben. Vergleicht man daher die Seitenkanten der π' in Fig. 10. mit den Seitenkanten der f in Fig. 11., so gehen in gleichen Sextanten die einen von *links oben* nach *rechts unten*, wenn die andern von *links unten* nach *rechts oben* gehen. Ist einer von den 3 und 3kantnern bestimmt, so sind beide bestimmt, denn die π' schärfen die scharfen Endkanten von f zu, und da f zu 1ster Abtheilung gehört, so liegt ihre Sektionslinie zwischen der zweiten Säule d' und dem Rhomboeder o. Demnach darf ich nur durch den Endkantenzonenpunkt von o (z. B. den zwischen ay) eine Linie nach der stumpfen Endkante von π' (also nach π'/π' zwischen $a'x'$) ziehen, so geht diese durch a', also

$$f = 0\,\overline{\underline{|c : a' : \tfrac{1}{4}x' : \tfrac{1}{3}y|}} = 0\,\overline{\underline{|c : a : \tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{3}a|}}.$$

Beispiele zum sechsgliedrigen Systeme.

Quarz.

Der Quarz erscheint immer in einem Dihexaeder (Tab. IV. Fig. 69.), zu dem sich jedoch nie eine Gradendfläche findet, welche die sechskantige Endecke abstumpfen und den Seitenkanten (s) parallel gehen würde. Eben so wenig findet sich eine Abstumpfungsfläche der 2+2kantigen Seitenecke. Desto häufiger aber erscheint die sechsseitige Säule (l''), durch welche die Seitenkanten abgestumpft werden, sie fehlen kaum einem Quarzkrystalle (Tab. VI. Fig. 12.). Die Ausdrücke beider Flächengruppen hängen von den

Axen ab, welche wir dem Dihexaeder unterlegen. Wir werden dem Dihexaeder π nicht die Axen geben, welche dem π Fig. 1. zukommen, sondern wir legen die Axen a durch die Seitenecken. Alsdann erhält das Dihexaeder den Ausdruck $\pi = |c : a : a : \infty a|$, und die Säulenflächen, welche die Seitenkanten abstumpfen, $l' = |\infty c : a : a : \infty a|$, ihre Sektionslinien fallen also mit den Axen selbst zusammen (Fig. 13.), bilden die 1*ste Säule*. Dennoch sind in Fig. 12. alle Axenrichtungen durch Kanten angedeutet. Denn die Kanten l'/l' müssen der Axe c parallel gehen, und die 3 Kantenrichtungen π/l' respektive den 3 Axen a. Da Fig. 12. in der Natur häufig sehr verzogen erscheint, so ist es ein erfreuliches Erkennungsmittel, daſs jede Säulenfläche stets eine sehr markirte Querstreifung zeigt, welche den Kanten π/l' parallel geht. Diese Querstreifen stehen senkrecht gegen die Säulenkante; denn wenn die Streifen den Kanten π/l' parallel sind, die Kanten π/l' aber gegen die Kanten l'/l' senkrecht stehen, da sie den aufeinander senkrecht stehenden Axen c und a respektive parallel gehen, so müssen auch die Querstreifen gegen die Säulenkanten senkrecht sein. Man sagt demnach, die Dihexaederflächen π sind auf die Säulenflächen l' gerade aufgesetzt.

Ein Dihexaeder 2ter Ordnung, dessen Flächen die dihexaedrischen Endkanten abstumpfen würden, kommt beim Quarze nie vor. Allein nicht selten treten untergeordnet Dihexaeder 1ster Ordnung auf, welche die Kanten π/l' abstumpfen; sie liegen also in der Zone der Seitenkante, und müssen, wenn sie sämmtlich den Ausdruck $|a : a : \infty a|$ erhalten, die Axe c unter einem Verhältniſs schneiden, das gröſser ist als 1. Gewöhnlich ist das Verhältniſs 3, also:

$$m = |3c : a : a : \infty a| = |c : \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{3}a : \infty a|;$$

aber auch die Zahlen 4, 7, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$ etc. kommen vor.

Eine für das Quarzsystem sehr interessante Fläche ist die sogenannte Rhombenfläche r (Fig. 14.), welche die von l' und π gebildeten 2+1+1kantigen Ecken (Fig 12.) abstumpft, und da solcher Ecken an einem Ende der Säule 6 vorhanden sind, so mufs die r einem Dihexaeder angehören. Kommt die Fläche nur mit π und l' zum Schnitt, so bildet sie ein Parallelogramm (bei Krystallen im Gleichgewicht einen Rhombus), folglich liegt sie nach zwei Richtungen mit π/l' in einer Zone, oder, was dasselbe ist, sie geht zwei abwechselnden Dihexaederkanten parallel, ihr Ausdruck ist also Fig. 13.:

$$r = |\overline{c : a : \tfrac{1}{2}a : a}|.$$

Obgleich diese Flächen sechs Mal an einem Säulenende erscheinen sollten, so gehören Quarze, an denen sie alle sechs vollzählig aufträten, zu den gröfsten Seltenheiten. Vielmehr treten, scheinbar gesetzlos, nur 5, 4, 3, 2 oder 1 auf, eine gesetzliche Unregelmäfsigkeit, die bei keinem andern Minerale sich in diesem Grade wieder vorfindet. Zu dieser Rhombenfläche r verhält sich obige Dihexaederfläche m gerade so, wie sich die r zum Dihexaeder π verhielt. Die m wird also zum Dihexaeder r die Rhombenfläche bilden, wie die Sektionslinien von r und m zeigen (Fig. 13.).

Einer ähnlichen Unregelmäfsigkeit, wie die Rhombenflächen, sind auch die Trapezflächen unterworfen. *Trapezflächen* werden nemlich die 6+6kantnerflächen genannt, welche die Kanten r/l' abstumpfen, also nur in einer Kantenzone des Dihexaeders π liegen (x Fig. 15.). Denn es müssen in dieser Kantenzone die Kanten x/r und x/l' der Trapezfläche x mit einander parallel laufen, während die übrigen beiden Kanten der Fläche x divergiren, wodurch x zu einem Trapez wird. Da an einem Säulenende der Kanten r/l' zwölf vorhanden sind, so sollte die Fläche x auch zwölf Mal auftreten. Allein diefs ist nie der Fall. Zunächst treten an einem Individuum entschieden nur die

einer Seite auf, wie z. B. Fig. 15. die zur rechten Seite der Säulenkante *(rechts gewundene Krystalle)*. Denn wir mögen an diesem Krystalle die Endecke c oder c' nach oben stellen, immer findet sich, dafs nur die zur Rechten der Säulenkante l''/l'' gelegene Kante r/l'' abgestumpft ist, die linke nie. Diesem entgegengesetzt finden sich nun wieder andere Krystalle, wo niemals die rechten, sondern immer nur die linken Kanten r/l' abgestumpft erscheinen *(links gewundene Krystalle)*. Links und rechts gewundene Krystalle sind scharf getrennt. Allein selbst nicht einmal die Hälfte der Trapezflächen (6 an jedem Säulenende) erscheinen je vollzählig, sondern ganz wie bei den Rhombenflächen fehlt immer ein Theil derselben, sowohl bei den links wie bei den rechts gewundenen Krystallen. So bestimmt daher das Gesetz ist, nach welchem entweder nur die Linken oder nur die rechten Trapezflächen auftreten, eben so unbestimmt ist die Anzahl der auftretenden Trapezflächen, 1, 2, 3 oder 4, selten 5 und 6. Diejenigen Krystalle, wo an einem Individuum linke und rechte Trapezflächen zugleich sich finden, kommen zwar öfter vor, doch möchte man geneigt sein, solche eher für Zwillinge, als für einzelne Individuen zu halten.

Bekannt ist es, dafs auch die Circularpolarisation des Lichtes mit den Trapezflächen auf das Engste im Zusammenhange steht, wo sich derselben Unterschied von Rechts und Links kund gibt.

Die Trapezflächen genau zu bestimmen, dazu fehlt es meist an einer zweiten Zone, wie schon bei unserer Fläche x der Fall ist. Da sie in einer Säulenkante des Dihexaeders liegt, so mufs sie das Zeichen $c : a$ haben; aufserdem stumpft sie auch die Kante zwischen Rhombenfläche und Säule ab, liegt also zwischen deren Sektionslinien. Wir vermuthen, dafs x Fig. 13. ihre Sektionslinie sei, welche ebenfalls mit Kante l''/r in eine Zone fällt, was

sich auch durch die Beobachtung bestätigt. Daher der Ausdruck

$$x = \overline{\underline{|c : a : \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}a|}}.$$

Aufser dieser finden sich noch eine ganze Reihe seltener Trapezflächen, die in einer Zone seitlich unter einander liegen, also diejenige Kante x/l'' abstumpfen, welche mit r/π parallel geht. Für die Projektionsfigur 13. günstig gelegen wäre die Fläche

$$z = \overline{\underline{|c : a : \tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{4}a|}},$$

welche in der Diagonalzone des Dihexaeders m liegt.

Aber nicht blos zwischen der Säule und Rhombenfläche, sondern auch zwischen der Rhomben- und Dihexaederfläche kommen Abstumpfungen vor, doch sind sie ungleich seltener. Wenn jene *untere Trapezflächen* genannt werden, so heifsen diese *obere.* Schon aus den obigen Bemerkungen folgt, dafs wenn eine der vielen möglichen Trapezflächen links oder rechts ist, so liegen alle links oder rechts; denn wäre dieses nicht der Fall, so träten ja an einem Krystalle linke und rechte Trapezflächen zugleich auf, was nicht gewöhnlich ist.

Turmalin.

Nachdem wir die merkwürdige Hemiedrie des Quarzes in ihren Hauptzügen kennen gelernt haben, dürfte es nicht ohne Interesse sein, noch auf eine zweite Art von Hemiedrie kurz die Aufmerksamkeit zu lenken, auf die *Hemiedrie des Turmalins,* der zum rhomboedrischen Systeme gehört.

Der Turmalin hat die merkwürdige Eigenschaft, dafs er nur selten an beiden Enden der Säule in gleichen Flächen krystallisirt, sondern wenn an einem Säulenende gewisse Flächen vorherrschen, so finden sich am entgegengesetzten andere. Vergleichen wir in dieser Rücksicht die beiden Enden auf Tab. VI. Fig. 16 und 17 mit einander,

so zeigt Fig. 16 nur die Flächen des Hauptrhomboeders (h), die ganz vorherrschend geworden sind, während am andern Ende Fig. 17 zwar noch die Rhomboederflächen h vorkommen, allein in Verbindung mit dem ersten schärferen Rhomboeder o, in der Diagonale von h liegend, und mit einem Drei und Dreikantner u, der die Seitenkante des Hauptrhomboeders h zuschärfen, also zur ersten Abtheilung gehören mufs. Sein Ausdruck läfst sich nur durch Messung genau bestimmen

$$u = \overline{|c:\tfrac{1}{2}x:\tfrac{1}{5}a:\tfrac{1}{3}y|} = \overline{|c:\tfrac{1}{2}a:\tfrac{1}{5}a:\tfrac{1}{3}a|}.$$

Wir ersehen daraus, dafs die Parallelen von o und u am Krystalle gar nicht vorhanden sind.

Noch schärfer prägt sich dieser Unterschied in der ersten Säule aus. Wir sehen nemlich, dafs die 2te Säule (d'), in der Kantenzone von h gelegen, vollständig erscheint, und demnach sollte man auch erwarten, dafs die 1ste Säule l'', welche die gleichen Kanten der 2ten Säule abstumpfen mufs, ebenfalls vollständig aufträte. Allein das ist fast nie der Fall, sondern es treten meist nur drei Flächen der ersten Säule auf, während die drei parallelen fehlen; treten sie aber auf, so sind sie bestimmt von den ersten dreien physikalisch verschieden. Wir bekommen also eine dreiseitige Säule (l''), deren 3 Kanten durch d zugeschärft werden. Eine ähnliche Differenz erstreckt sich dann auch weiter über die 6 + 6kantigen Säulenflächen, durch welche die Kanten d'/l'' abgestumpft werden müssen. Sie zerlegen sich in zwei Gruppen, von denen die eine die 6 Kanten d'/l'' abstumpft, die andere aber die drei Kanten d'/d' zuschärft. Oft treten der Säulenflächen zwar so viele auf, dafs die Säule, aus ähnlichen Gründen, wie beim 4gliedrigen Systeme p. 251, cylindrisch wird, aber die Differenz macht sich dennoch geltend.

Denken wir uns jetzt alle Flächen weg und nur noch die einfache dreiseitige Säule nebst dem Rhomboeder h

bestehen (Fig. 18 und 19), so müssen beide Flächen an den verschiedenen Enden der Säule ein verschiedenes Verhältnifs gegen einander haben. Wenn nemlich an dem einen Ende (Fig. 18.) die Rhomboederfläche h auf die *Säulenfläche* l'' aufgesetzt ist, so ist am andern (Fig 19.) die h auf die *Säulenkante* l''/l'' aufgesetzt. Dieser Unterschied der Enden mufs bei allen Turmalinkrystallen hervortreten, selbst da, wo die dreiseitige Säule und das Rhomboeder h nicht auftreten. Denn da alle Flächen mit l'' und h in einem bestimmten Zusammenhange stehen, so wird dieser Zusammenhang dennoch wirkend sein, mögen auch die l'' und h' verschwinden.

Gustav Rose hat auch wirklich in einer interessanten Abhandlung (über den Zusammenhang zwischen der Form und der elektrischen Polarität der Krystalle, Pogg. Ann. Bd. 39. pag. 285.) nachgewiesen, dafs bei *abnehmender Temperatur* das Säulenende Fig. 16 und 18 stets *negativ*, das Säulenende Fig. 17 und 19 aber *positiv* sei, bei *zunehmender* findet folglich das *Umgekehrte* statt, da es nemlich schon lange bekannt ist, dafs der Turmalin durch Erwärmung an beiden Enden der Säule polare Elektricität erlangt, und diese Pole bei ab- und zunehmender Temperatur umschlagen.

Beryll.

Der Beryll (grün gefärbt Smaragd genannt) ist ein ausgezeichnet sechsgliedriges System, an welchem alle Flächengruppen vollzählig auftreten. Wie beim Quarze, so gehen wir auch hier (Fig. 7 und Fig. 20. Tab. VI.) vom Dihexaeder π aus und schreiben es, wie die Projektion Fig. 13 lehrt.

$$\pi = \left|\overline{\underline{c : a : a : \infty a}}\right|.$$

Wenn beim Quarze die Gradendfläche stets fehlte, so herrscht sie hier, mit dem Zeichen

$$o' = \overline{|c : \infty a : \infty a : \infty a|}$$

versehen, immer vor; ihr entspricht auch ein ziemlich deutlicher Blätterbruch. Tritt zu ihr noch die Abstumpfung der Seitenkante des Dihexaeders hinzu, nemlich die erste Säule

$$l'' = \overline{|\infty c : a : a : \infty a|},$$

welche nie fehlt, so erscheint die Dihexaederfläche π nur sehr untergeordnet, die 6 Endkanten der sechsseitigen Säule o'/l'' abstumpfend. Häufig tritt zur π die Rhombenfläche r, nach zwei Seiten mit l''/π in eine Zone fallend, daher ihr Ausdruck wie beim Quarz

$$r = \overline{|c : a : \tfrac{1}{2}a : a|}.$$

Da die r die unter π liegende Dihexaederkante von u abstumpft, so mufs

$$u = \overline{|c : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}a : \infty a|}$$

sein, wie die Sektionslinie u in Fig. 13 zeigt.

Wir haben also in Fig. 20 zwei Dihexaeder 1ster Ordnung, π und u, und ein Dihexaeder 2ter Ordnung r, das von u das nächste stumpfere ist, da r die Endkanten u/u abstumpft. Auch die Säulenfläche l'' ist bestimmt, denn sie fällt nach beiden Seiten mit π/r in eine Zone, d. h. sie liegt in zwei gegenüberliegenden Dihexaederkanten.

Die Fläche n Fig. 7 pafst abermal in die Reihe, denn sie gehört dem nächsten stumpfern Dihexaeder von r an, da sie deren Endkante r/r abstumpft, daher

$$n = \overline{|c : \tfrac{2}{3}a : \tfrac{2}{3}a : \infty a|};$$

ihre Fläche stumpft demnach an Fig. 20 die Kante π/u ab.

Die 6 und 6kantnerflächen x und w liegen, wie beim Quarz, in der Endkantenzone des Dihexaeder π, allein eine zweite Zone fehlt zur Bestimmung. Zwischen Säulen- und Dihexaederfläche liegen sie, und die x stimmt wirklich mit der x des Quarzes

$$x = |c : a : \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}a|,$$

übereín, allein sie erscheint nicht auf einer Seite der Säulenkante, sondern zu beiden Seiten, mufs daher 12mal an einem Säulenende auftreten. Ebenso

$$w = |c : a : \tfrac{1}{8}a : \tfrac{1}{7}a|,$$

die dem Quarze gleichfalls nicht fremd ist. Da ν die über der Säulenfläche gelegene Endkante dieses 6 und 6kantner abstumpft, so mufs der Axenausdruck in $a \frac{2}{8+7}$ werden, also

$$\nu = |c : \tfrac{2}{15}a : \tfrac{2}{15}a : \infty a|.$$

Apatit.

Nach diesen Anleitungen kann es nun nicht schwer werden, selbst die schwierigsten Krystalle mit geringen Mitteln zu entziffern, wie z. B. die Apatitkrystalle, Fig. 21 und 22. Tab. VI. Wir haben durchgehends die gleichwerthigen Flächen mit gleichen Buchstaben bezeichnet, so dafs also π das gewöhnliche Dihexaeder ist, r die Rhombenfläche, da wir vom rechts gelegenen π über r nach x, b und l'', so wie vom links gelegenen π über r nach l'' eine Zone sehen; die Rhombenflächen stumpfen die Endkanten des Dihexaeders u ab, so dafs u, r und π genau in ihrer Lage den gleichbenannten Flächen beim Beryll entsprechen. Unter r liegt noch eine Fläche k, welche rechts in die Zone l''/u und links in die Zone l''/u fällt, daher

$$k = |c : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{2}a|.$$

Ueber r sehen wir eine Fläche n die Dihexaederkante π abstumpfen, folglich

$$n = |c : 2a : a : 2a|.$$

Ueber π liegt die q, zu welcher n eine Rhombenfläche sein würde, denn n fällt in 2 Kantenzonen q/q, daher

$$q = |c : 2a : 2a : \infty a|.$$

Defshalb mufs sich der Ausdruck von π' zum Ausdrucke von q verhalten, wie beim Quarz der Ausdruck von π zum Ausdrucke von r.

Endlich sehen wir unter k die zweite Säule d', ebenso unter u die 1ste Säule l'', während o' als Gradendfläche die Säule schliefst, so dafs auf die erste Säule 3 Dihexaeder erster Ordnung, und auf die zweite Säule ebenfalls 3 Dihexaeder zweiter Ordnung aufgesetzt sind.

Es blieben nur noch in Fig. 21 x und b zur Bestimmung über. Da x ausser der Kantenzone von π noch mit l''/u in einer Zone liegt, so mufs sie dem x des Quarzes gleich sein. Die b liegt mit u und der zweiten Säule d' in einer Zone, daher mufs ihr die Sektionslinie b Fig. 13 zukommen, woraus der Ausdruck

$$b = \overline{\underline{| c : a : \tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{3}a |}}$$

folgt. Dafs diese Flächen x und b nur auf einer Seite vorkommen (auf der Linken in unserem Falle), ist eine auffallende Analogie des Apatites mit dem Quarze.

Die Deduktionsflächen des zweigliedrigen Oktaeders

$$\overline{\underline{| a : b : c |}}.$$

Wir haben §. 21, §. 25 und §. 30 das Rhombenoktaeder (Tab. VII. Fig. 2.) als den Hauptkörper des Systemes kennen gelernt. Da die 4 Flächen (o) ungleichseitige Dreiecke sein mufsten, so folgt, dafs die Kanten in drei Gruppen zerfallen. Stellen wir das Oktaeder nach der Axe cc' aufrecht, so heifsen die vier unter sich gleichen Kanten d, welche die Axenendpunkte a, b, a', b' mit einander verbinden, *Seitenkanten;* die vier unter sich gleichen d', welche die a, c, a', c' verbinden, *vordere Endkanten*; die vier unter sich gleichen d'', welche die $b, c, b' c'$ mit einander verbinden, *seitliche Endkanten.* Sämmtliche Ecken (a, b, c)

sind daher 2 und 2kantig und von einander verschieden, ihren gegenüberliegenden (a', b', c') aber respektive gleich.

Projiciren wir dieses Oktaeder auf die Axenebene ab (Fig. 1.), d. h. auf seine Hexaidfläche, so erhalten die vier Flächen das Zeichen

$$o = \overline{|a : b : c|},$$

das vier Krystallräume bezeichnet, und achtmal, die Axen mit den gehörigen Strichen versehen, hingeschrieben werden kann (A. §. 52).

Von den vier Hexaidflächen kann keine der andern gleich werden, da sie sämmtlich verschiedene Ecken (Glieder) abstumpfen, daher sind die 3 Zeichen

$$h = \overline{|c : \infty a : \infty b|}$$

$$h' = \overline{|a : \infty b : \infty c|}$$

$$h'' = \overline{|b : \infty a : \infty c|}$$

nur eindeutig. Zwei davon (h' und h'') sehen wir Fig. 3 am Oktaeder o auftreten, sie bilden eine *breite rechtwinkliche Säule*, d. h. eine rechtwinkliche Säule, deren Krystallräume physikalisch verschieden sind. Der Krystall gehört dem Strahlzeolithe an, worin die h'' sehr blättrig ist, die h' aber gar nicht. Da h'' mit den Kanten d' und h' mit d'' parallel gehend zugehörige Hexaidflächen des Oktaeders o sind, so erhalten wir den Zonenconnexus des Dodekaides. Kante h''/h' geht daher der Axe c parallel, und würde die dritte Hexaidfläche h (Gradendfläche) noch hinzutreten, so würden in diesem ungleichräumigen Hexaide die Kante h/h' der Axe b und h/h'' der Axe a parallel gehen. In Fig. 1 ist daher h die Projektionsebene, und die Axen a und b entsprechen den Sektionslinien von h'' und h'.

Die 6 Krystallräume der Dodekaidflächen zerlegen sich, gleich den Oktaidkanten, in drei Paare. Das *erste Paar* gleicher Krystallräume stumpft die gleichen Seitenkanten

des Oktaeders o grade ab (Fig. 4.), d. h. so, dafs es zugleich in die Zone der Hexaidkante h'/h'' fällt, daher sein Ausdruck

$$d = |\overline{\underline{a : b : \infty c}}|.$$

Das Zeichen kann nur zwei gleiche Krystallräume in sich fassen, ist also zweideutig. Es ist diefs die *geschobene vierseitige Säule*, welche im zweigliedrigen Systeme eine Hauptrolle spielt. Die stumpfe Kante derselben ist durch h' und die scharfe durch h'' (Fig. 4.) abgestumpft. Ihre Sektionslinien (d Fig. 1) sind bekanntlich die Orte für die Kantenzonenpunkte.

Das *zweite Paar* gleicher Krystallräume stumpft die vordern Endkanten d' (Fig. 2) ab, wie aus der Parallelität zwischen $od'o$ (Fig. 4) einleuchtet. Die Kanten der Säule d'/d' werden gleichfalls durch die Hexaidflächen h und h' abgestumpft; würden wir daher den Krystall nach der Axe b aufrecht stellen, so bekämen wir eine ähnliche vierseitige Säule als die erste. Ihr Ausdruck folgt aus Fig. 1.

$$d' = |\overline{\underline{a : c : \infty b}}|.$$

Ganz dasselbe gilt auch für das *dritte Paar* d'', welche die Kante d'' abstumpfen und mit hh'' in einer Zone liegen würden, woraus das Zeichen

$$d'' = |\overline{\underline{b : c : \infty a}}|$$

folgt. Würden diese drei Paare sich ausdehnen, so erhielten wir nothwendig den Zonenzusammenhang des Dodekaides, wie aus der Projektion (Fig. 1) folgt, daher heifsen die drei Paare *zugehörige Paare*.

Es kommen aber ausser diesen 3 Paaren noch eine Menge anderer Paare hinzu, die sämmtlich dem Pyramidenwürfel analoge Ausdrücke erhalten. Denn wir sehen, dafs auf Tab. I. die Pyramidenwürfelflächen zwischen d und h liegen, folglich müssen sie in unserer Fig. 4 z. B. die Kanten zwischen h/d' abstumpfen. Solcher unter sich gleicher Kanten sind aber nur 4 vorhanden (an jedem Säu-

lenende 2), also bilden die Abstumpfungsflächen derselben eine geschobene vierseitige Säule, einem Paare von Krystallräumen angehörig. Dasselbe gilt von den Kanten d'/h', d/h', d/h'', d''/h, d''/h'', woraus folgt, dafs sich der Pyramidenwürfel in sechs verschiedene Krystallraumpaare zerlegt. Solcher Paare kommen oft eine ganze Reihe über einander vor, wie z. B. Fig. 5, wo

$$\pi'' = |\overline{b:2c:\infty a}|,$$

p'' und φ'', darunter gelegen, aber nach $3c$ und $4c$ gehen, bei gleicher Axe b.

Würden sich von diesen Flächen (d und π) zwei ganz beliebige Paare, die aber verschiedenen Axen parallel gehen müssen, ausdehnen, so erhielten wir stets ein *Oblongoktaeder* (Fig. 6. Tab. VII.). Denn brächten wir die 4 Krystallräume ($2\pi^{\cdot}+2d$) ins Gleichgewicht, so würden von der Säule d/d die beiden Kanten c, welche der gleichnamigen Axe c parallel gehen, und von der Säule $\pi^{\cdot}/\pi^{\cdot}$ die beiden Kanten b, welche der gleichnamigen Axe b parallel gehen, bleiben. Da sich die beiden Axen b und c aber stets unter rechten Winkeln schneiden müssen, so mufs der basische Schnitt $bcbc$ nothwendig ein Oblongum werden, während die beiden andern basischen Schnitte unter sich kongruente Rhomben sind, denn sämmtliche übrige Kanten $\pi^{\cdot}/d$ sind unter sich gleich. Wollten wir daher diesem Oblongoktaeder die unserem Systeme zukommenden Axen unterlegen, so müssen wir die Mitten der Kanten b und c durch die Axe c und b verbinden, die dritte Axe a würde dann senkrecht gegen die Axen b und c stehen und durch die Ecke gehen, welche die zusammengerückten $dd\pi^{\cdot}\pi^{\cdot}$ in einem Punkt der Kante d/d (Fig. 6.) mit einander bilden würden.

Es folgt nun von selbst, dafs je zwei Dodekaidpaare (z. B. d' und d'' Fig. 1) ebenfalls ein Oblongoktaeder unter sich bilden müssen, zu welchem die dritte d das zu-

gehörige Paar ist. Würden wir aber in derselben Fig. 1 von den Oblongoktaedern π'' und d' ausgehen, so würden die d zu diesen nicht die zugehörigen Paare bilden, weil in Fig. 4 von π'' über d' nach d keine Kantenparallelität vorhanden ist (die 3 Paare $\pi'' d' d$ bilden kein Dodekaid).

Alle übrigen Krystallräume, welche den Leucitoiden, Pyramidenoktaedern und 48flächnern analoge Ausdrücke erhalten, treten stets zu vier auf, d. h. in Oktaedern. Denn sämmtliche denkbare Leucitoide liegen z. B. auf Tab. I. zwischen Oktaid- und Hexaidfläche, daher müssen sie in Fig. 4. Tab. VII. die Kanten zwischen h/o, h'/o und h''/o abstumpfen; allein solcher Kanten sind nie mehr als 4 am obern und 4 parallele am untern Säulenende gleich, daher können auch nur so viel unter sich gleiche Abstumpfungsflächen entstehen. Dasselbe gilt vom Pyramidenoktaeder, dessen Sektionslinien zwischen o und d liegen, dessen Flächen also die Kanten d/o, d'/o und d''/o abstumpfen, oder, was dasselbe ist, die Oktaederkanten zuschärfen. Oktaederkanten finden sich aber dreierlei, daher gibt die Zuschärfung jeder Kante ein besonderes Oktaeder. Was endlich den 48flächner anbelangt, der sich auf die mannigfachste Weise zwischen alle vorhandenen Sektionslinien legt, so kann auch er nie mehr als 4 gleiche Krystallräume enthalten, weil in der ganzen Projektionsfigur sich nie über vier gleichliegende Sektionslinien finden. Der 48flächner z. B. würde (Fig. 4) die vier gleichen Kanten d/d' zuschärfen, diefs gäbe acht Reduktionsebenen, allein 4 davon, welche nach d' geneigt sind, sind andere als die 4 nach d gewendeten, mithin zerlegen sich die 8 in 4 + 4.

Fassen wir also das Gesammtresultat noch ein Mal zusammen, so wird das Oktaeder der allgemeinste Körper sein, weil nie mehr als 4 Krystallräume unter sich gleich werden können. Der allgemeinste Ausdruck desselben ist

$$\left| c : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b \right|.$$

Wird $m=n$, oder $m=n=1$, so verwandelt sich der allgemeinste Ausdruck in die Ausdrücke:

$$\overline{\left| c : \frac{1}{m}a : \frac{1}{m}b \right|} \text{ und } \overline{|c : a : b|},$$

die ebenfalls noch Oktaeder bedeuten. Wird aber m oder $n=o$, gleichgültig, ob das andere m oder $n=1$ ist, so ergeben sich die Zeichen:

$$\overline{\left| c : \frac{1}{m}a : \infty b \right|} \text{ und } \overline{|c : a : \infty b|}.$$

Diese können nur 2 gleiche Krystallräume bedeuten, also geschobene vierseitige Säulen oder sogenannte Paare. Wird endlich auch die $m=o$, so erhalten wir die Zeichen:

$$\overline{|c : \infty a : \infty b|},$$

einen einzigen Krystallraum bedeutend.

Demgemäfs können im 2 und 2gliedrigen Systeme 4 gleichblättrige Brüche erscheinen, die aber dann immer ein Oktaeder bilden (Schwefel), gewöhnlicher jedoch finden sich 2 gleiche in einer geschobenen vierseitigen Säule oder nur einer.

Je weiter wir in der Systematik vorschreiten, desto mannigfaltiger wird die Wahl der Körper, von denen wir in der Darstellung ausgehen können. Im *regulären Systeme*, wo die möglich gröfste Anzahl gleicher Krystallräume sich fand, war gar keine Wahl möglich, sondern wir mufsten immer von ein und demselben Oktaeder ausgehen, weil bei jeder andern Wahl keine Zusammenstellung der gleichen Krystallräume gelungen wäre.

Im 4-, 3- und 6gliedrigen System trat schon ein gröfserer Spielraum ein. Hier konnten wir von jedem beliebigen viergliedrigen Oktaeder, dreigliedrigem Rhomboeder und sechsgliedrigem Dihexaeder ausgehen. Die Hauptbeschränkung war nur, dafs die Axe c, um welche sich alle gleichen Flächengruppen symmetrisch lagerten, stets auf-

recht genommen werden mufste. Im 2 und 2gliedrigen Systeme ist auch diese Bedingung aufgehoben. Es ist gleichgültig geworden, welche der 3 Axen (a, b, c) wir aufrecht stellen, wir werden durch keine dieser Stellungen die gleichflächigen Gruppen mehr zerreissen. Wegen dieser grofsen Möglichkeit von Ausgangspunkten ist daher die Entzifferung eines natürlichen Krystalles schwerer geworden. Dennoch gibt die Natur uns gewöhnlich einen Fingerzeig, welche Axe wir zur aufrechtstehenden nehmen sollen; eine der geschobenen Säulen ist nämlich, analog den frühern Systemen, häufig lang gezogen, und diese Säulenkante wählt man dann gern zur aufrecht stehenden Axe.

Beispiele zum Zweigliedrigen Systeme.

Topas.

Der Topas pflegt in einer langgezogenen Säule (d/d Fig. 7 – 9 Tab. VII) von 124° 19′ vorzukommen. Auf diese Säulenfläche sind drei Oktaederflächen o, l und λ grade aufgesetzt, da z. B. Kante d/l (Fig. 7.) auf Säulenkante d/d senkrecht steht. Von welchem dieser 3 Oktaeder wir ausgehen, ist für die Flächengruppirung gleichgültig. Wählen wir das unterste o, so wird also

$$o = [a : b : c];$$

Axe a geht von der vordern Endkante o/o zur hintern; Axe b von der seitlichen rechten Endkante zur seitlichen linken; folglich verbindet c die Endecken.

Um nun weitere Flächen deduciren zu können, müssen wir nothwendig zu den Hexaidflächen schreiten. Eine davon, die Gradendfläche h, ist Fig. 7 vorhanden; denn wir sehen, dafs diese h mit je zwei in einer Endecke sich gegenüberliegenden o in eine Zone fällt (Fig. 9.). Daraus folgt der Ausdruck

$$h = [c : \infty a : \infty b].$$

Ihr entspricht ein ausgezeichneter Blätterbruch, der nur einzig, wie alle drei Hexaidflächen, auftreten kann. Die Fläche ist sehr drusig, aber oft vorherrschend. Die beiden andern Hexaidflächen

$$h' = \overline{\underline{|a:\infty b:\infty c|}} \text{ und } h'' = \overline{\underline{|b:\infty a:\infty c|}}$$

fehlen nicht, sind aber in unsern Figuren nicht gezeichnet. Wenn der Axenausdruck für *o* vier Krystallräume bezeichnet, so bezeichnen die Hexaidflächen nur jede einen einzigen. Man darf daher das Zeichen nur hinsetzen, um sogleich die Anzahl gleicher Krystallräume zu ersehen.

Jetzt können wir nun weiter zu den Dodekaidflächen fortschreiten. Von diesen fällt das Säulenpaar *d* in die Seitenkantenzone von *o*, würde auch noch in die Hexaidkantenzone fallen, wenn die Hexaidflächen (h' und h'') verzeichnet wären, denn dieselben stumpfen die scharfe und stumpfe Säulenkante d/d ab. Daher

$$d = \overline{\underline{|a:b:\infty c|}}.$$

Das 2te Paar d' stumpft die vordern Endkanten des Oktaeders ab, so wie das 3te Paar d'' die seitlichen abstumpft. Wenn man gleichwohl die Hexaidkante, in welcher die d' und d'' liegen müssen, nicht sieht, so folgen schon aus der gleichmäfsigen Lage zur Säule die Zeichen

$$d' = \overline{\underline{|a:c:\infty b|}} \text{ und } d'' = \overline{\underline{|b:c:\infty a|}}.$$

Dächten wir uns sämmtliche *d* (also d, d' und d'') ausgedehnt, so erhielten wir den Zonenkonnexus des Dodekaides, allein die Dodekaidflächen wären jetzt dreierlei Parallelogramme ($2+2+2$), während sie im viergliedrigen System $4+2$ und im dreigliedrigen $3+3$ waren.

Die oberhalb *o* liegenden Flächen *l* zu finden, dürfen wir nur auf die Seitenkantenzone des Oktaeders *o* sehen, in welcher sie liegen mufs, da $d\,o\,l\,\lambda$ eine Kantenparallelität zeigen. Alle oberhalb *o* in der Seitenkantenzone $\underline{|a:b|}$ liegenden Flächen müssen die versteckten Oktaeder-

kanten zuschärfen, also Icositetraidflächen sein mit dem Ausdrucke

$$\overline{\left| a : b : \frac{1}{n} c \right|},$$

worin n eine Zahl gröfser als 1 bedeutet. Wäre keine zweite Zone da, so würden wir das n ungefähr errathen. Allein für die Fläche l ist diefs nicht nöthig, denn sie stumpft die Dodekaidkante d'/d' ab, erhält demnach den Ausdruck

$$l = \overline{|a : b : \tfrac{1}{2}c|};$$

dafs sie nur vier Mal auftreten kann, folgt schon daraus, dafs zwischen den Säulenflächen d und der Gradendfläche h (oder zwischen d' und d') nur vier gleiche Kanten möglich sind.

Für die λ ist nicht immer eine zweite Zone vorhanden; jedoch wenn sich die Flächen ungleich* ausdehnen, so beobachtet man öfter, dafs zwischen d'' (Fig. 8) dem rechten λ und dem linken o eine Kantenparallelität statt findet. Man darf diefs nur auf die gleichen Buchstaben der Tab. I. übertragen, woraus dann hervorgeht, dafs

$$\lambda = \overline{|a : b : \tfrac{1}{3}c|}$$

sein mufs. Selbst über λ kommt noch ein Oktaeder mit $\frac{1}{4}c$ vor.

Ausser diesen Flächen finden sich hauptsächlich noch Flächenpaare, die Tetrakishexaiden angehören würden, sie stumpfen vorzugsweise die Kanten vorhandener Oktaeder ab. So erscheint z. B. über d'' eine Fläche, welche die seitliche Endkante des Oktaeders l abstumpft. Da diese Kante den Ausdruck $\overline{|b : \tfrac{1}{2}c|}$ erhält, so mufs die Fläche

$$\pi' = \overline{|b : \tfrac{1}{2}c : \infty a|}$$

heifsen. An der vordern Endkante desselben Oktaeders erscheint eine ähnliche Abstumpfung viel seltener. Anstatt dessen erscheint über d' eine Abstumpfungsfläche der

vordern Endkante des Oktaeders λ mit dem Ausdrucke

$$\boxed{a : \tfrac{1}{3}c : \infty b}.$$

Dafs alle diese Flächen einer Axe parallel gehen, folgt schon aus ihrer Lage gegen die übrigen. Denn würde z. B. die d' die Kante o/o nicht so abstumpfen, dafs sie der Axe b parallel ginge, so müfste sie die Kante zuschärfen, d. h. es müfste an derselben Kante links und rechts eine Fläche d' erscheinen, weil der Krystall nach der Linken, wie nach der Rechten denselben Flächenzusammenhang zeigt. Da diefs niemals der Fall ist, so kann man sicher sein, dafs die d' einem Flächenpaare angehören mufs. Man braucht daher zur Bestimmung nur eine Zone. Würden wir noch Sätze aus der rechnenden Krystallographie zu Hilfe nehmen, so würde sich finden, dafs die Winkel, welche d' nach beiden Seiten mit o oder mit d macht, unter sich gleich sein müssen; man sagt, die Fläche d *stumpfe* die Kante o/o *grade ab*, und sei auf die Säulenkante d/d *grade aufgesetzt*.

Ausser diesen Abstumpfungsflächen vorhandener Oktaederkanten erscheint noch unterhalb d' eine Fläche

$$\pi'' = \boxed{b : 2c : \infty a},$$

die also keinem vorhandenen Oktaeder angehören kann; die d' dehnen sich nicht selten sehr aus, verdrängen alle andern vorhandenen Flächen, und bilden dann ein auf die Säulenfläche quer aufgesetztes Dach (Paar), dessen Kante der Axe a parallel geht. Da die Fläche π'' in derselben Zone liegt, so mufs sie also ebenfalls der a parallel laufen. Schneidet sich die linke d mit dem rechten o, so fällt π'' in diese Kante; sie liegt also in der Diagonalzone von o, wodurch ihr Ausdruck sich ergibt (Fig. 1).

Ausgedehnt vor allen sind die Säulenflächen. Zunächst sehen wir die scharfe Säulenkante d/d durch π zugeschärft. Eine solche Fläche mufs natürlich b unter einem kleinern Verhältnifs als 1 schneiden; wir vermuthen

$$\pi = \overline{|a : \tfrac{1}{2}b : \infty c|}.$$

Zu erfahren, durch welche Zonen eine solche Fläche bestimmt sein würde, dürfen wir nur die Sektionslinie π in Fig. 1 ziehen. Solche fällt z. B. mit der linken π'' und der vordern d in eine Zone, welche oft beobachtet wird. Auch eine Säule $\overline{|a : \tfrac{1}{3}b|} = p$ kommt vor. Alle diese schärfen die scharfe Säulenkante zu, da ihre Sektionslinien im stumpfen Winkel der Sektionslinien d liegen, während die Zuschärfungsflächen der stumpfen Säulenkanten im scharfen Winkel liegen müfsten, wie z. B.

$$\pi^0 = \overline{|a : 2b : \infty c|}.$$

Auf diese Weise haben wir vier verschiedene π (π, π^0, π', π'') erhalten, die also vier Säulen bilden würden, von denen zwei der c und zwei der a parallel gehen; wären die zwei der b parallelen noch vorhanden, so hätten wir im zweigliedrigen System einen dem Pyramidenwürfel analogen Körper.

Dieses sind ungefähr die Flächen, welche nicht blos beim Topas, sondern auch theilweis in den meisten zwei- undzweigliedrigen Systemen wieder erscheinen; ihr Zusammenhang ist sehr leicht aufgefafst, wenn man auf das gegenseitige Verhalten der Säulen zu den Oktaedern das Augenmerk richtet. Die lang ausgedehnte Säule (d, π etc.) mit ihrer Zone wird man immer leicht erkennen; quer dagegen liegt die Gradendfläche h, und zwischen h und d in gleicher Zone mit h/d befinden sich die Oktaeder, deren Flächen unter rechtem ebenem Winkel auf die Säulenrichtung aufgesetzt sind. Kennt man die Oktaeder, so findet man auch leicht die übrigen Flächenpaare. Ob man gleich gewöhnlich d/d als Säule aufrecht stellt, so könnte man dennoch mit derselben Leichtigkeit die Säule d'/d', worin b Säulenaxe, oder d''/d'', worin a die Säulenaxe ist, aufrecht stellen. Nähme man d zur Säule, so wäre o auf

dieselbe eben so aufgesetzt, wie sie auf d aufgesetzt ist, die Oktaeder (l, λ) lägen aber jetzt nicht in der Seitenkanten-, sondern in der vordern Endkantenzone etc.

Es leuchtet weiter ein, dafs, wie w r von den Axen des Oktaeder o ausgegangen sind, wir auch von den Axen der Oktaeder l, λ etc. ausgehen könnten; ja wir dürften irgend zwei Flächenpaare zu einem Oblongoktaeder sich ausdehnen lassen, und dessen Axen zu den Hauptaxen des Systemes annehmen.

Haben wir uns jedoch einmal für das Axenkreuz der o entschieden, dann finden sich beim Topase auch noch Flächen, die den Ausdrücken der 48flächner analog sein würden, nämlich die Fläche g (Fig. 7), welche die Kante d''/l abstumpft. Da l die Kante des Dodekaides d/d' abstumpft, so mufs g ebenfalls in der Kantenzone des Dodekaides liegen; die g macht aber auch zu gleicher Zeit mit der vordern Endkante λ/λ parallele Kanten, daraus folgt die Sektionslinie $g = 3a : \frac{3}{2}b$, demnach die zugehörige Fläche

$$g = \overline{|c : 3a : \tfrac{3}{2}b|} = \overline{|\tfrac{1}{3}c : a : \tfrac{1}{2}b|}.$$

Da g das Zeichen $a : \frac{1}{2}b$ mit der Säulenfläche π gemein hat, so ist sie unter rechten Winkeln auf die Säulenkante π/π aufgesetzt, wie aus Fig. 7 und 9 hervorleuchtet; denn wird h und π gehörig ausgedehnt, so stumpft g die Kante h/π ab. Noch eine zweite Fläche q kommt vor, welche die Kante π/d' abstumpfen würde, zugleich aber der Kante λ/λ parallel ging. Sie erhielt den Ausdruck

$$q = \overline{|\tfrac{1}{3}c : a : \tfrac{1}{4}b|}.$$

Dieses Verhältnifs näher einzusehen, dürfen wir uns nur den Krystall Fig. 7 nach d' in die Säulenstellung bringen, so dafs die Axe b zur Hauptaxe wird. Vor wie nach würde λ die Axe b in der Einheit schneiden, die über ihr liegende g aber b in der Hälfte, die über g folgende q im Viertel, während alle drei von a nach $\frac{1}{3}c$ gehen.

Vergleichen wir die Projektionsfigur (Tab. VII Fig. 1.)

des Topases mit der allgemeinen Projektionsfigur (Tab. I.), so werden wir finden, dafs die Zonenpunkte der gleichnamigen Flächen durchaus in beiden übereinstimmen. Wir hätten also der neuen Projektionsfigur gar nicht bedurft, sie unterscheidet sich einzig und allein durch die Winkel, unter welchen sich die Sektionslinien schneiden. Dennoch thut man wohl, der leichtern Einsicht wegen, sich zu mehreren zweigliedrigen Systemen ähnliche Figuren zu entwerfen. Wir sehen die vier Quadranten zwischen den Axen a und b durchaus noch gleich, einer hat dieselben Sektionslinien und dieselben Punkte, wie der andere. Mehr als vier Sektionslinien können nicht in gleichen Zonenpunkten liegen. Denn untersuchen wir z. B. die λ, so liegt jede in einem 7-, 3-, 4-, 6-, 2- und 3linigen Zonenpunkte. Ausser den 4 Linien λ ist aber keine 5te in der ganzen Figur möglich, welche durch gleiche Zonenpunkte gehen könnte, daher können auch nur 4 Krystallräume mit einander gleich werden. Aehnliches gilt von den Flächenpaaren (d, π) und den drei einzelnen Flächen (h).

O l i v i n.

Dem Olivine gehören die Fig. 4, 10 und 11 auf Tab. VII. an. Wir wollen vom Oktaeder

$$o = \overline{|a : b : c|}$$

ausgehen, woraus dann die Säulenflächen d, durch welche die Seitenkanten abgestumpft werden, folgen. Die Oktaederflächen neigen sich unter solchen Winkeln gegeneinander, dafs diese Säule d/d einen stumpfen Winkel von 130° einschliefst, also noch um fast 6° stumpfer ist, als die gleiche Säule des Topases. Eben so leicht folgen die Flächenpaare d' die vordern Endkanten, und d'' die seitlichen Endkanten abstumpfend. Beleuchten wir zunächst Fig. 10, so sehen wir hier nicht, wie beim Topas, in der

Seitenkantenzone von o, also zwischen o/h, eine Reihe von Oktaedern entwickelt, sondern anstatt dessen bildet sich die vordere Endkantenzone aus; denn es liegen in der vordern Endkante o/o die Flächen l' und λ', sie gehen also wie die Kante o/o von a nach c, schneiden aber die Axe b unter einem kleinern Verhältnisse als 1. Wir dürfen uns nur das Flächenpaar d zu einer Säule ausgedehnt denken, so werden die drei Oktaeder $o\,l'\,\lambda'$ sich zur Säule d grade so verhalten, wie beim Topase die $o\,l\,\lambda$ sich zur Säule d verhielten. Daher vermuthen wir vorläufig die Axenausdrücke

$$l' = \overline{\underline{|a : c : \tfrac{1}{2}b|}};$$

$$\lambda' = \overline{\underline{|a : c : \tfrac{1}{3}b|}};$$

Ausdrücke, die sich auch wirklich durch beobachtete Zonenverhältnisse bestätigt haben. Sind aber diese Flächen festgesetzt, so ergeben sich daraus die Seitenflächen π und p. Denn π stumpft die Seitenkante l'/l' ab, die von a nach $\frac{1}{2}b$ gehen mufs, und da die π ausserdem in der der Axe c parallel gehenden Säulenzone d/d liegt, so ist ihr Ausdruck

$$\pi = \overline{\underline{|a : \tfrac{1}{2}b : \infty c|}}.$$

Aus gleichen Gründen wird

$$p = \overline{\underline{|a : \tfrac{1}{3}b : \infty c|}},$$

da sie die Seitenkante λ'/λ', die von $a : \frac{1}{3}b$ geht, abstumpft.

Ausserdem zeigt Fig. 10 noch die Gradendfläche h, und die Abstumpfungsfläche der scharfen Säulenkante (h''). Das Flächenpaar π'' stumpft die seitliche Endkante von l'/l' ab, daher

$$\pi'' = \overline{\underline{|c : \tfrac{1}{2}b : \infty a|}},$$

und Fläche φ stumpft die seitliche Endkante λ'/λ' nicht ab, sondern macht mit den Oktaederflächen λ' nach oben convergirende Kanten, sie mufs daher die Axe b unter einem

kleinern Verhältnifs als $\frac{1}{3}$ schneiden; die Messungen haben ergeben:

$$\varphi = \overline{\underline{|c : \tfrac{1}{4}b : \infty a|}}.$$

Zwar kommen beim Olivin ausser den entwickelten kaum noch andere Flächen vor. Allein der *Serpentin* findet sich zuweilen in den deutlichsten Afterkrystallen, die einstens Olivin waren, und durch einen spätern geologischen Prozefs zu Serpentin verwandelt wurden, wie die 5 Zoll langen Serpentinkrystalle von Snarum (Kirchspiel Modum in Norwegen) beweisen, welche inwendig noch wohl erhaltener Augit sind. Diese Afterkrystalle zeigen ausser obigen Flächen noch eine Reihe anderer, die wir in Fig. 11 durch eine Horizontalprojektion angedeutet haben. Von dem Krystalle ist nämlich nur die vordere Hälfte gezeichnet, wie die Buchstaben der Flächen, mit Fig. 10 verglichen, sogleich zeigen. Zunächst sehen wir unter dem Dodekaïdpaare d' eine Fläche $\pi^{\cdot}$, die, gehörig ausgedehnt, mit Kante o/π'' in eine Zone fällt, und da sie ausserdem zwischen d' und h' liegend der Axe b parallel gehen mufs, so ist ihr Ausdruck

$$\pi^{\cdot} = \overline{\underline{|c : \tfrac{1}{2}a : \infty b|}}.$$

Unter o liegt eine Fläche λ'' in der Diagonalzone von $\pi^{\cdot}$ und in der Kantenzone des Dodekaides d/d, gibt in Fig 1 eingetragen

$$\lambda'' = \overline{\underline{|c : \tfrac{1}{2}a : b|}}.$$

Unter l' liegt eine Fläche t ebenfalls in der Diagonalzone von $\pi^{\cdot}$, ausserdem ist sie aber auf die Säulenfläche d grade aufgesetzt, d. h. sie stumpft die Kanten zwischen h und d ab, daraus ergibt sich ihr übriger Zonenzusammenhang, sowie ihr Ausdruck

$$t = \overline{\underline{|c : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}b|}} = \overline{\underline{|2c : : a : b|}},$$

ein Analogon des Pyramidenoktaeders.

Endlich kommt noch eine dritte Fläche aus derselben

Diagonalzone von π· vor, zugleich aber noch die Kante zwischen π und l' abstumpfend (die Zone war nicht scharf beobachtbar); diefs gäbe

$$\gamma = \overline{|c : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{4}b|},$$

also ein Analogon des 48flächner.

Brächten wir diesen Krystall in die Säulenstellung von d'/d', so würden die λ'' und t sich grade so zur π· verhalten, wie sich die o und l' zur d' verhalten.

Dafs wir bei solcher Flächenmannigfaltigkeit auch von andern Oktaedern ausgehen könnten, dürfen wir nicht mehr erwähnen. Hätten wir z. B. das Oktaeder l' zur Bestimmung der Axenlängen α, β, γ gewählt, so wären, da $l' = \overline{|a : c : \tfrac{1}{2}b|}$ war, die neuen Axen $\alpha = a$, $\gamma = c$, aber $\beta = \tfrac{1}{2}b$ oder $b = 2\beta$; wir brauchen also diese neuen Axengröfsen nur im obigen Ausdrucke zu substituiren, um die Verhältnisse der Flächen auf die neuen Axenlängen zu erhalten; z. B. die Fläche

$$\pi = \overline{|a : \tfrac{1}{2}b : \infty c|} \text{ würde} = \overline{|\alpha : \beta : \infty\gamma|},$$

sie wäre also die Säulenfläche zu dem neuen Hauptoktaeder, wie die Krystallfiguren zeigen etc.

Schwerspath.

Die Ausdrücke der vorkommenden Flächen desselben sind kurz folgende:

$$d = \overline{|a : b : \infty c|},$$

zwei gleiche blättrige Brüche bilden eine geschobene Säule von 101° 40'.

$$h = \overline{|c : \infty a : \infty b|},$$

der sogenannte erste blättrige Bruch, weil er viel vollkommener als die vorigen beiden ist, bildet die Gradendfläche zu jener Säule.

$$h' = \overline{|a : \infty b : \infty c|} \text{ und } h'' = \overline{|b : \infty a : \infty c|}$$

die stumpfen und scharfen Kanten der geschobenen Säule abstumpfend.

$$d'' = \overline{|b : c : \infty a|},$$

das Flächenpaar bildet einen Säulenwinkel von 105° 24′, welcher im Axenpunkte b liegt.

$$d' = \overline{|a : c : \infty b|},$$

das Flächenpaar bildet einen Säulenwinkel von 116° 22′, welcher im Axenpunkt a liegt.

$$o = \overline{|a : b : c|}.$$

$$\pi^{\cdot\cdot} = \overline{|2a : c : \infty b|},$$

ein Flächenpaar, das in dem Axenpunkte $2a$ einen Säulenwinkel von 77° 43′ bildet.

$$\pi^{\cdot} = \overline{|3a : c : \infty b|}.$$

$$\varphi^{\cdot} = \overline{|4a : c : \infty b|}.$$

$$\ldots = \overline{|5a : c : \infty b|}.$$

$$t^{\cdot} = \overline{|2a : b : c|}.$$

$$\ldots = \overline{|2a : b : \tfrac{1}{2}c|}.$$

Das Schwerspathsystem zeichnet sich vor allen Systemen besonders dadurch aus, dafs die verschiedenen Flächenpaare sich häufig auf Kosten der übrigen Flächen ausdehnen, wodurch vielerlei verschiedene Säulen und Tafeln entstehen. Eine der einfachsten Formen ist z. B. Fig. 12, wo sich die Säulenflächen d mit der Gradendfläche h selbstständig ausgedehnt haben. In dieser Säule entspricht die Säulenkante d/d der Axe c, während die Diagonalen der rhomboidalen Fläche h den Axen a und b parallel gehen würden, denn nur unter dieser Voraussetzung kann den Flächen h und d das obige Zeichen zugehören. Es wird

nun sehr leicht sein, die Lage aller übrigen Flächen gegen diese Säule zu finden. Die Oktaederflächen *o* müssen z. B. die 4 Kanten *h/d* abstumpfen, denn wir dürfen nur Fig. 4, 5, 7, 8, 10 etc. vergleichen, um den Grund einzusehen. Tritt zu dieser Säule die Fläche π'', auf die stumpfe Säulenkante grade aufgesetzt (Fig. 13), so wird zuweilen der erste Blätterbruch (*h*) so stark zurückgedrängt, dafs er nur noch eine schwache Abstumpfung der stumpfen Säulenkante π''/π'' bildet. Der scharfe (in Fig. 13 sichtbare) Säulenkantenwinkel beträgt 77° 43′, er ist nur höchst selten durch *h′* abgestumpft, und nach dieser Säule dehnt sich der Schwerspath überaus gern aus (daher *erste Säule* genannt). Würden zu dieser Säule die Oktaederflächen *o* hinzutreten, so könnten, in der aufrechten Stellung der Säule, die Flächen *o* auf π'' nicht grade aufgesetzt sein, sondern die *o* würden die Kante π''/π'' unter schiefen Winkeln schneiden, wie das z. B. in Fig. 15 (Ilvait) mit *o* gegen die Säule π der Fall ist. Hier macht die π nach der Richtung *b* hin divergirende Kanten, sie mufs also im Vergleich zur Säule *d* bei gleichem *a* die Axe *b* unter einem kleinern Verhältnifs als 1 schneiden. Die Fläche *d*, welche die Seitenkante von *o* abstumpfen sollte, müfste die Kante π/π zuschärfen. Die Fläche π ist also kein zugehöriges Paar zum Oktaeder *o*. Tritt noch ein zweites Flächenpaar (*d″*) hinzu Fig. 13, welches auf die scharfe Säulenkante *d/d* aufgesetzt erscheint, und dehnen sich die beiden Flächenpaare π'' und *d″* bis zum Verschwinden der Säulenflächen aus, so entsteht Fig. 14 ein Oblongoktaeder mit abgestumpfter Endecke durch die Fläche *h*, d. h. eine rechtwinklich vierseitige Tafel mit zweiflächig zugeschärften Rändern. Würden die Oktaederflächen *o* zu dieser Tafel treten, so müfsten sie in die Diagonalzone von *d″* fallen (*d″* ist ja ein zugehöriges Paar), allein π'' würde die vordere Endkante des Oktaeders so abstumpfen müssen, dafs die neuen Kanten π''/o

nach der Axe c hin divergirten. Träte hingegen das Oktaeder $t^{\cdot}$ hinzu, so fiele diefs in die Diagonalzonen beider Flächen $\pi^{\cdot\cdot}$ und d'', es wäre also auf beide Säulen grade aufgesetzt. Nach der Säule d', mit 105° 24′ in der Axe b, dehnen sich die Krystalle viel seltener aus (daher *zweite Säule* genannt). Da alle einzelnen Krystalle des Zwei und zweigliedrigen Systemes sich ganz ähnlich verhalten, so glauben wir uns aller weitern Bemerkungen überheben zu können.

Weil sich der Schwerspath nur selten nach seiner Säule d aufgewachsen findet, sondern meistens mit seiner ersten Säule $\pi^{\cdot\cdot}/\pi^{\cdot\cdot}$, so pflegt man ihn auch wohl nach der Axe b, welche der Richtung der ersten Säule parallel geht, aufrecht zu stellen, indem man dieselben Axen beibehält, sie nur anders benennt. Wir wollen diefs von dem *Bleivitriolkrystall* (Fig. 16 Tab. VII.) zum Schlufs noch kurz entwickeln, der dem Schwerspathsystem in allen Beziehungen gleicht, nur dafs die Winkel um ein Weniges verschieden werden, was dem Totalbilde keinen Eintrag thut.

Wir gehen ebenfalls vom Oktaeder o aus, dessen Axe a uns zugekehrt, b seitlich und c aufrecht gedacht wird. Die Flächen h' und h'' sind dann die zugehörigen Hexaidflächen, denn sie fallen in 2 gegenüberliegende Oktaederkanten o/o, bilden also unter sich eine breite rechtwinkliche Säule. Fläche π liegt zwar in der Säulenzone, kann aber kein zugehöriges Paar bilden, da sie die Seitenkante o/o unter nach a hin convergirenden Kanten abstumpft. Denken wir also, die π gehe durch den Axenpunkt a, so mufs sie die b unter $\frac{1}{n}$ kleiner als 1 schneiden (in unserm Falle ist $n=2$). Die π entspricht demnach der *ersten* Schwerspathsäule. Die seitliche Endkante von o ist durch d'' abgestumpft, und da h'' zugleich die Kante d'/d'' abstumpft, so mufs d'' ein zugehöriges Paar sein, also der

zweiten Schwerspathsäule entsprechen. Daraus folgt, dafs h', d' und π ausgedehnt gedacht genau die Fig. 14 bilden müssen, nur mit etwas verschiedener Flächenneigung. Das Oktaeder l' liegt in der vordern Endkantenzone von o, die einzelnen Flächen gehen daher von a nach c, müssen aber die dritte b unter $\frac{1}{2}$ schneiden, da π die Seitenkante des Oktaeders l' abstumpft, diese Kante aber wie die Fläche von a nach $\frac{1}{2}b$ geht. Die π bilden also ein zugehöriges Paar zum Oktaeder l', folglich ist l' auf Fläche π grade aufgesetzt, wie auch schon aus dem rechten Winkel der Kanten π/l' mit π/h'' folgt. Zuletzt kommen wir noch zur Fläche t' in der seitlichen Endkantenzone des Oktaeders o, da Flächen $h'\,o\,t\,d''$ eine Kantenparallelität zeigen. Die t' mufs also, wie alle diese Flächen, von b nach c gehen; zugleich liegt sie aber auch in der Seitenkantenzone des Oktaeders l', sie geht daher zugleich von a nach $\frac{1}{2}b$, oder von $2a$ nach b, mithin wird

$$t' = \overline{\underline{|\, b : c : 2a \,|}},$$

was man schon aus der Lage gegen o errathen konnte. Denn stellen wir den Krystall nach der Säule d'' aufrecht, so liegt die t' unter der o, geht also nach einem gröfsern a, als die o. Demnach schärfen die t' die seitlichen Endkanten des Oktaeder o zu.

Bemerkung über Hemiedrie. Da das Oktaeder der Körper mit den meisten gleichen Krystallräumen ist, die im 2gliedrigen Systeme möglicher Weise auftreten können, so wird, analog mit den vorhergehenden Systemen, hier nur die tetraedrische (geneigtflächige) Hemiedrie auftreten, welche wir beim regulären Systeme (pag. 190) näher auseinander setzten, dafs nämlich eine Oktaederfläche wächst, wenn die anliegenden verschwinden. Eine solche Hemiedrie ist auch wirklich beim *Braunmanganerze* beobachtet. Doch ist diese Hemiedrie nicht durchgreifend, sondern es treten als vorherrschend die Oktaeder und Flächenpaare

auf, während nur ein einziges 2gliedriges Tetraeder sich untergeordnet dazu gesellt.

Eine andere merkwürdige Art von Hemiedrie findet sich, wiewohl selten beobachtbar, beim *Kieselzinkerz.* Sobald der Krystall an beiden Enden der Säule ausgebildet ist, so zeigen sich an dem einen Ende andere Flächen als am andern. Es können demnach, grade wie bei dem Turmalin, die Flächen des einen Endes den Flächen des andern nicht parallel gehen, was bei vollflächigen Krystallen doch der Fall sein mufs. Die Analogie mit Turmalin wird dadurch noch erhöht, dafs grade beim Kieselzinkerz auch dieselbe polare Thermoelektricität sich findet, welche wir vom Turmalin erwähnten (p. 306). Auch beim Topase, den schon Haüy durch Erwärmung polarelektrisch erhielt, dürfte demnach etwas Aehnliches zu vermuthen sein.

Die Deduktionsflächen des Zweiundeingliedrigen Systems.

Je weiter wir uns vom regulären Systeme entfernen, wo die gröfste Anzahl gleicher Krystallräume sich fand, desto geringer wird diese Anzahl, welche möglicher Weise im Systeme auftreten kann. Wenn im zweigliedrigen Systeme noch häufig Oktaeder vorkamen (also 4 gleiche Krystallräume), so fehlen diese hier, die Oktaeder zerlegen sich in Paare, so dafs nur Flächenpaare und einzelne Flächen erscheinen. Denn stellen wir ein sogenanntes 2 + 1 gliedriges Oktaeder (§. 23 und §. 32) nach einer seiner Axen aufrecht (Tab. VII. Fig. 17), so sind die seitlichen Endkanten *o/o'* unter sich noch gleich, ebenso die durch *d* abgestumpften Seitenkanten *o/o'*, allein die vordere Endkante *o/o* ist eine andere als die hintere *o'/o'*. Einem solchen Oktaeder mufsten schiefe Axen unterliegen. Denn die

Schnitte durch die Seitenkanten (o/o') und durch die seitlichen Endkanten (o/o') sind noch Rhomben; also die Axen a und b, so wie b und c schneiden sich noch unter rechten Winkeln: allein der dritte Schnitt durch die vordere (o/o) und hintere Endkante (o'/o') ist ein Rhomboid, ein Parallelogramm mit ungleichen Seiten, wefshalb sich die Axen a und c unter schiefen Winkeln schneiden (§. 15). Wenn aber die Axe c in der Axenebene ac gegen Axe a geneigt erscheint, so werden die Oktaederflächen (o), welche vom vordern a nach c gehen, anderer Beschaffenheit sein, als die vom hintern a zur Axe c gehenden Oktaederflächen o'. Das Oktaeder zerfällt in ein *vorderes* und *hinteres Augitartiges Paar (Augitpaar)*, so genannt, weil beim Augit (Fig. 18) eines dieser Flächenpaare (o') am Ende der 8seitigen Säule gewöhnlich vorzuherrschen pflegt.

Aus diesem Oktaeder lassen sich nun alle andern Flächen folgern. Zunächst werden auch hier die Hexaidflächen (h) von einander verschieden sein müssen, denn sie stumpfen die drei unter sich ungleichen Oktaederecken ab. Wie im zweigliedrigen System, so bilden die ausgedehnten h' und h'' (Fig. 18) auch hier eine breite rechtwinkliche Säule, weil die Axenebenen bc und ac, welchen die Hexaidflächen h' und h'' respektive parallel gehen, noch auf einander senkrecht stehen; ebenso h (parallel Axenebene ab) und h'' (parallel Axenebene ac); allein die h und h' bilden jetzt eine geschobene ungleichflächige vierseitige Säule, da die Axenebenen ab und bc nicht mehr auf einander rechtwinklich stehen. Demnach stehen von den 3 Axenebenen zwei Mal je zwei auf einander senkrecht, allein die dritten je zwei machen mit einander einen schiefen Winkel (Monoklinoedrisches System, p. 128). Die Gründe, warum ein Paar von Axenebenen auf einander geneigt stehen mufs, wenn zwei Axen (a und c) mit einander einen schiefen Winkel machen, werden im rechnenden Theile auseinander gesetzt werden.

Gehen wir nun von den Hexaid- zu den Dodekaidflächen, so dürfen wir nur aus §. 32 erinnern, dafs die Dodekaidflächen *dd* (Fig. 17), welche die Seitenkanten des Oktaeders abstumpfen, noch ein unter sich gleiches Flächenpaar bilden müssen, dasselbe würde von den Flächen d'' gelten, durch welche die seitlichen Endkanten abgestumpft werden. Allein das dritte zugehörige Paar, die vordere (o/o) und hintere Endkante (o'/o') abstumpfend, zerlegt sich jetzt in zwei einzelne für sich auftretende Krystallräume. Dasselbe gilt nun auch von allen Flächen, die in der Zone dieses Paares liegen, also der Axe *b* parallel gehen, während die Flächen aus der Säulenzone (der Axe *c* parallel) und aus der Axenzone von *a* noch Paarweis auftreten müssen (Analoga des Pyramidenwürfels). Der nach der Säule d/d (Fig. 17) aufrechtstehende Krystall wird also durch die Hexaidfläche h', wenn man sich dieselbe durch die Endkanten o/o und o'/o' gelegt denkt, noch in zwei symmetrische Hälften getheilt, eine *linke* und eine *rechte*. Allein vorn, wo das Augitpaar *o* liegt, ist der Krystall anders, als hinten, wo das Augitpaar o' sich findet. Würde demnach die Abstumpfungsfläche der Säulenkante d/d (Hexaidfläche h') in die seitlichen Endkanten o'/o' gelegt, so würde die vordere Hälfte von der hintern wesentlich verschieden sein, beide Hälften würden sich nicht mehr wie links und rechts verhalten, wie diefs noch beim zweigliedrigen System der Fall ist.

Dafs ausser jenen Flächen alle anderen als augitartige Paare auftreten müssen, leuchtet aus Fig. 17 ein. Dächten wir uns z. B. Flächen aus der Kantenzone o/o zwischen h''/o gelegen, so würden diese die Kante h''/o abstumpfen; es sind aber nur zwei solcher gleichen Kanten (links und rechts eine) vorhanden, daher existiren auch für diese Lage nur Flächenpaare. Oder denken wir uns Flächen, durch welche die Kanten h'/o' (Fig. 18) abgestumpft werden, so können auch hier nur vorn zu jeder

Seite über h' Paare sich entwickeln, die den Paaren, welche unten an h' auftreten, nie gleich werden, da oben die stumpfen, unten die scharfen Kanten der vierseitigen Säulen h'/o' sich finden.

Durch diese Betrachtung rechtfertigt sich der Name des Systems, denn so wie die Krystallräume nur zu je zwei oder zu eins, eben so müssen auch die davon abhängenden Glieder (Kanten, Ecken etc.) in gleichen Zahlenverhältnissen (die Parallelen nicht mitgezählt) auftreten. Es ist z. B. der Krystall Fig. 17 an jedem Säulenende 2+1+1 kantig und 2+2 flächig, und dächten wir uns die Dodekaidflächen d', welche die Kanten o/o und o'/o' abstumpfen, hinzu, so würde dasselbe Säulenende 2+2+1+1 flächig werden.

Das *Hendyoeder* (Weifs) verdient noch einer besondern Erwähnung. Es besteht aus einer geschobenen Säule d/d (Fig. 12 Taf. VII) und einer Schiefendfläche h, welche zu beiden Seiten mit d gleiche, aber schiefe Winkel macht. Die meisten 2+1 gliedrigen Systeme entwickeln sich so, dafs ihre wesentlichsten Flächen entweder die stumpfen vordern Endkanten h/d (Fig. 12), oder die scharfen hintern abstumpfen. Daher werden diese Zonen die *ersten Kantenzonen* genannt. Da das Hendyoeder ein Hexaid ist, so kann man ihm nur unter bestimmten Voraussetzungen Axen unterlegen.

Fassen wir das Gesagte nochmals zusammen, so erscheinen ausser den Hexaidflächen noch die der Axe b parallel gehenden Paare mit den Zeichen

$$\boxed{c : \frac{1}{m}a : \infty b} \quad \text{und} \quad \boxed{c : \frac{1}{m}a' : \infty b}$$

einzeln, so dafs unter jedem beliebigen Zahlenausdrucke von m nur ein einziger Krystallraum verstanden wird. Alle andere Flächenausdrücke

$\left|c : \infty a : \frac{1}{m} b\right|$, $\left|a : \frac{1}{m} b : \infty c\right|$, $\left|c : \frac{1}{m} a : \frac{1}{n} b\right|$

bezeichnen augitartige Paare und Säulen, von denen die Säulen als Augitpaare und die Augitpaare als Säulen genommen werden können, je nachdem wir die eine oder die andere Axe (c oder a) als Hauptaxe wählen.

Es leuchtet nemlich ein, dafs, da alle auftretenden Krystallflächen gegen die Axenebenen ac symmetrisch liegen (auf jeder Seite von ac sind dieselben Flächen in derselben gegenseitigen Lage zu finden), alle Kanten der Augitpaare und Säulen in der Axenebene ac liegen müssen, sofern nur die Flächen im Gleichgewicht gedacht werden, d. h. keine Fläche der einen Seite sich mehr ausdehnt, als die ihr entsprechende der andern. Drehe ich daher den Krystall um die Axe b, so wird nach und nach jede Kante der Augitpaare zur Säulenkante werden, und für jede dieser Stellungen wird die Symmetrie ungestört bleiben. Sehen wir z. B. auf den Gypskrystall Fig. 17 Tab. VII, so ist für die dort gewählte Stellung d/d die Säule, o/o und o'/o' aber sind die Augitpaare; Säule und Augitpaare liegen gegen die durch die Kanten d/d, o/o und o'/o' gelegte Ebene (die Axenebene ac) symmetrisch. Drehe ich nun den Krystall in der Axenebene ac um die Axe b, so wird die Säule d/d aus ihrer Stellung gerückt, und eines der Augitpaare, entweder o/o oder o'/o', die Stellung der Säule einnehmen. Würde o/o zur Säule, so wären d/d und o'/o'; würde o'/o' zur Säule, so wären d/d und o/o die Augitartigen Paare. Die Axenrichtung b mufs allen verschiedenen Stellungen gemein bleiben und stets senkrecht auf die Axenebene ac stehen; die Axenrichtungen a und c werden aber für jede Lage andere. Denn für die Axenstellung von d/d bilden die Paare o/o und o'/o' das Oktaeder, von dessen Axen wir ausgehen können. Denken wir uns in diesem Oktaeder die Kanten o/o und o'/o'

zu einem Rhomboid ausgedehnt, so werden die Diagonalen dieses Rhomboides den Axen *a* und *c* entsprechen, während *b* auf beide senkrecht steht. Welchen Winkel *a* und *c* einschliefsen, ob einen rechten oder schiefen, das hängt von den Winkeln des Rhomboides ab. Nähmen wir hingegen die Axenstellung von *o'/o'*, so bildeten die Augitpaare *o/o* und *d/d* das dem Systeme zu Grunde liegende Oktaeder. Jetzt würden die zu einem Rhomboide verlängerten Kanten *d/d* und *o/o* die Axen *a* und *c* bestimmen, natürlich immer unter der Voraussetzung, dafs die Oktaederflächen im Gleichgewicht wären. Da aber der Winkel dieses letztern Rhomboides ein ganz anderer ist, als der des erstern, so müssen auch die demselben zugehörigen Diagonalen sich unter ganz andern Winkeln schneiden, als im ersten Falle; woraus von selbst folgt, dafs diese neuen Axen *a* und *c* im Allgemeinen eine andere Richtung haben (den ersten *a* und *c* nicht respektive parallel gehend), als die vorigen. Die *b* hingegen steht auch hier wieder senkrecht auf der Axenebene *a c*, welche mit der ersten Axenebene *a c* zusammenfallen mufs, da, wie wir gesehen haben, alle Kanten der Augitpaare in einer Ebene liegen. Nun gehen alle Linien (*b*, welche auf ein und derselben Ebene senkrecht stehen, einander parallel; also haben die *b* sämmtlich ein und dieselbe Richtung.

Diese bemerkenswerthe Eigenschaft des 2 und 1gliedrigen Systemes hat es mit sich gebracht, dafs die verschiedenen Krystallographen in der Wahl von *b* nie, in der Wahl von *a* und *c* aber sehr von einander abweichen, was Anfängern und Geübten nicht selten bedeutende Schwierigkeit macht *). Manche neuere Krystallographen glau-

---

*) Wir haben zu unsern Axen stets die von Weiss eingeführten Buchstaben gewählt. Leider ist Naumann davon abgewichen. Naumann's *b* ist Weiss's *b*, N. *c* ist W. *a*, N. *a* ist W. *c*. Was beim Vergleich der Naumann'schen Werke stets zu beachten ist.

ben nämlich, dafs diejenigen Axen a und c die naturgemäfsesten seien, durch welche die Axenausdrücke der einzelnen Flächen möglichst einfach werden. So geht z. B. NAUMANN (Lehrbuch der Mineralogie, Berlin 1828) beim Feldspath von dem Oktaeder $o o' m m'$ (Tab. III. Fig. 1—4) aus, wie wir diefs in den Beispielen zur Zonenlehre (pag. 100) zeigten. Bei einer solchen Wahl schneiden sich die dem Oktaeder zugehörigen Axen a und c unter einem schiefen Winkel von 60° 34'. Wenn es jedoch erlaubt wäre, die Axen a und c ganz willkührlich zu wählen, gleichgültig, unter welchem Winkel sie sich schneiden; und wenn nur einzig und allein darauf zu sehen ist, dafs die Flächenausdrücke möglichst einfach werden: so würde das Oktaeder $o o' T T'$ (p. 102) noch zweckmäfsiger als jenes sein.

In diese Zweideutigkeit der Wahl verfällt die WEISS'sche Darstellung nicht. WEISS stellt zunächst den Grundsatz auf, dafs in den 3axigen Systemen die rechtwinklichen Axen entschieden die naturgemäfsesten seien, worauf nicht nur die Analogieen der einzelnen Systeme unter einander, sondern auch die physikalische Eigenschaft mehrerer 2 und 1gliedriger Krystalle hindeuten (Elasticitätsaxen, Druckaxen etc.). Sollte es sich nun auch wirklich finden, dafs in einem Systeme *genau rechtwinkliche* Axen nicht vorhanden sind, so wird man jedoch statt deren stets zwei solche Axen a und c finden, die sich der Rechtwinklichkeit möglichst annähern. Diese verdienen dann unbedingt vor allen andern den Vorzug. Und wirklich bestätigt sich diese Ansicht auch bei allen 2 und 1gliedrigen Systemen. Denn z. B. der Feldspath, welcher in der NAUMANN'schen Stellung einen ganz schiefen Axenwinkel ac erhielt, nähert sich, wenn wir ihn in der WEISS'schen Stellung (p. 94) nehmen, in solchem Maafse der Rechtwinklichkeit, dafs kleine Differenzen in mancher Beziehung noch in Frage gestellt werden könnten. Die Flächen $P x T T'$ sind so

gegen einander geneigt, dafs, wenn man sie ins Gleichgewicht bringt, und dem entstehenden Oktaeder die Axen der Säulenstellung unterlegt, Axe a die Axe c unter einem Winkel von 88° 50′ schneidet, mithin fehlen nur 1° 10′ am rechten Winkel. Ja, es gibt 2 und 1gliedrige, dem Feldspathe ganz analoge, Systeme, wo diese Differenz (Augit, Hornblende) fast ganz verschwindet, denen also ein vollkommen rechtwinkliches Axenkreuz zu Grunde gelegt werden kann.

Beispiele zum Zweiundeingliedrigen Systeme.

Augit.

Der Augit erscheint in einer geschobenen Säule d/d (Fig. 18 und 19. Tab. VII.) von 87° 6′. Der Blätterbruch beider Krystallräume läfst sich noch deutlich beobachten. Auf die vordere scharfe durch h' abgestumpfte Säulenkante sehen wir öfter (Fig. 19) eine Fläche d' grade aufgesetzt; ihr entspricht auf dem Hinterende eine Fläche d^0, beide verhalten sich zur Säule d/d gleich. Daraus leuchtet ein, dafs die 4 Flächen $d d d^0 d'$ ein Oktaeder bilden, das Fig. 19 in seiner Säulenstellung gezeichnet ist. Denken wir uns dieses Oktaeder im Gleichgewicht, so wird seine Hauptaxe c der Säulenkante d/d, seine Axe b den Kanten d^0/d' parallel gehen; während die dritte Axe a die über h' sich erhebenden Oktaederecken verbindet, wie in der Projektion Fig. 20 geschrieben steht. Die vier Krystallräume schneiden sich unter solchen Winkeln, dafs die Axenwinkel ab und bc genau rechte sind, nur c neigt sich gegen a unter einem wenig schiefen Winkel von 90° 20′, eine Differenz, die vielleicht ganz vernachlässigt werden dürfte. Demnach ist die Schiefendfläche d^0 entschieden von der hintern Gegenfläche d' physikalisch different. Die Fläche h' folgt aus dem Oktaide, denn sie liegt mit d'/d^0 und

d/d in einer Zone, ist also eine zugehörige Hexaidfläche. Setzen wir daher die

$$d = \overline{|a : b : \infty c|}$$

$$d^0 = \overline{|a : c : \infty b|}$$

$$d' = \overline{|\bar{a}' : c : \infty b|},$$

so wird die Abstumpfungsfläche der scharfen Säulenkante

$$h' = \overline{|a : \infty b : \infty c|}.$$

Weiter läſst sich jedoch die Deduktion nicht fortsetzen, da uns die zweite zugehörige Hexaidfläche fehlt (A. §. 75). Zwar hat uns die Erfahrung schon gelehrt, daſs die Abstumpfungsfläche der stumpfen Säulenkante höchst wahrscheinlich

$$h'' = \overline{|b : \infty a : \infty c|}$$

werden muſs; daſs folglich o' mit d^0/d und d'/h'' in einer Zone liegend das Axenzeichen

$$o' = \overline{|a' : c : \tfrac{1}{2} b|}$$

erhält. Doch brauchen wir zu dieser unwissenschaftlichen Aushülfe nicht unsere Zuflucht zu nehmen, wenn wir vom Hendyoeder $d\,d\,d^0$ ausgehen, dessen scharfe Endkanten d^0/d wir durch die Flächen o' abgestumpft sehen. Diese Abstumpfungsflächen bilden unter sich wieder eine Kante o'/o' (durch d' abgestumpft), und geben wir den Hendyoederflächen obige Axenausdrücke, so kann man nach A. §. 78 die Axen so legen, daſs Kante o'/o' zugleich von a' nach c geht. Die Flächen o' liegen in dieser Kante, aber auch zugleich in der ersten Kantenzone des Hendyoeders (d^0/d), daher darf man nur ihre Sektionslinien in Fig. 20 ziehen, woraus obiges Zeichen folgt. Nachdem nun für die d^0, d und o' das Axenzeichen bestimmt ist, folgt auch der obige Ausdruck für h'' in der bekannten Säulenzone d/d und der Zone o'/o' gelegen. Verbinden wir jetzt in

der Projektionsfigur (Tab. VII. Fig. 20) die Zonenpunkte $d.o'$ und $d.o'$ durch

$$\pi = \overline{|c : \tfrac{1}{3}a' : \infty b|},$$

die sich sehr schön beim Augit vorfindet, so folgern wir mit Hülfe desselben

$$d' = \overline{|a' : c : \infty b|},$$

welches in der Vertikalzone π/d^0 und in der Zone o'/o' liegt; und

$$h' = \overline{|a : \infty b : \infty c|},$$

in derselben Vertikalzone π/d^0 und in der Säulenzone d/d liegend. Die Richtung der Axe a fällt in der Projektion mit der Sektionslinie von h'', und der Axe b mit der Sektionslinie von h' zusammen. Die Projektionsebene selbst, als Gradendfläche der Säule, mit dem Zeichen

$$h = \overline{|c : \infty a : \infty b|},$$

findet sich sehr gewöhnlich, ist aber jetzt noch nicht durch Zonen bestimmbar. Denn die Projektionsebene fällt immer nur in so viel Zonen, als Systeme von parallelen Sektionslinien vorhanden sind. Bis jetzt hat aber die Projektionsfigur deren nur eins ($d^0 h' d' \pi$).

Endlich stumpfen die Flächen g die stumpfen Endkanten des Hendyoeders ab; ihre Sektionslinien liegen demnach auf der Projektion zwischen d und d^0 im scharfen Winkel (während die o' im stumpfen liegen). Da nun zu gleicher Zeit das links gelegene g mit der rechts gelegenen Kante h'/o', und das rechts gelegene g mit der links gelegenen Kante h'/o' parallel geht, so mufs die Fläche

$$g = \overline{|\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}b : c|}$$

werden. Wodurch Fig. 19 vollständig entwickelt ist.

Hätten wir uns nicht die Aufgabe gestellt, möglichst rechtwinkliche Axen zu bekommen, so hätten wir auf einem viel einfachern Wege den Zonenzusammenhang der

Flächen kennen lernen können. Nemlich so: da in Fig. 10 Fläche d' durch die vier anliegenden Flächen $h'\,o'\,d^0\,o'$ zu einem Parallelogramme wird, so müssen diese 4 Flächen ein Oktaid bilden, zu welchem d' die zugehörige Hexaidfläche ist. Die beiden andern Hexaidflächen sind g, denn jede fällt in die gegenüberliegenden Endkanten o'/h' und o'/d^0 des Oktaides. h'' liegt in der Seitenkante o'/o' des Oktaides und in der Hexaidkante g/g, ist also Dodekaidfläche. Endlich fallen die Flächen d in die Oktaidkantenzone o'/d^0 und in die Diagonalzone h'/h'' des Oktaides, es sind also Icositetraidflächen (λ Tab. I.). Fahren wir nun in dieser Weise zu deduciren fort, so wird zuletzt auch die Gradendfläche h deducirbar sein, und die ganze Aufgabe der Legung neuer Axen hängt von der Lösung der Aufgabe, alle Flächen auf die Fläche h zu projiciren (A. §. 77) ab.

Dem Anfänger macht es oft einige Schwierigkeit, welches als das vordere und welches als das hintere Ende am Krystall zu nehmen sei. Da die hauptsächlichsten Augitpaare eines 2+1gliedrigen Systemes gewöhnlich in der ersten Kantenzone des Hendyoeders liegen, so wird alles von der Stellung des Hendyoeders abhängen. Stellt man das Hendyoeder nach seiner Säule d/d aufrecht, so pflegt man die Seite der Säule vorn zu nennen, wohin die Schiefendfläche d^0 sich neigt. Daraus folgt, dafs auf der vordern Seite die vordern Endkanten (d^0/d) der Schiefendfläche (d^0) mit der vordern Säulenkante (d/d) einen stumpfen Winkel machen, während auf der hintern Seite die hintern Endkanten einen scharfen Winkel (das Complement des stumpfern) mit der hintern Säulenkante machen. Was für die Endkanten des Hendyoeders gilt, gilt nun auch für alle Kanten, welche diesen Endkanten parallel gehen.

Nach dieser Regel ist Fig. 22 Tab. VII von der vordern Seite gezeichnet, denn der Winkel von Kante h'/d mit Kante g/d ist ein stumpfer, und g liegt in der ersten

Kantenzone des Hendyoeder (ddd^0). Wenn wir ferner annehmen, dafs das Augitpaar o' (Fig. 18) in der Kantenzone eines Hendyoeders liegt, so mufs der Krystall von der Hinterseite gezeichnet sein, da die Kante o'/d mit Kante h'/d einen scharfen Winkel macht. Aus demselben Grunde ist auch Fig. 19 von der Hinterseite gezeichnet.

Die Zonen von Fig. 22 besser zu übersehen, haben wir Fig. 21 die Horizontalprojektion daneben gezeichnet. Es bezeichnen die gleichen Buchstaben dieselben Flächen, wie in Fig. 18 und 19. Demnach haben h', h'', d, d^0, d', o' und g obige Ausdrücke, nur γ bleibt noch zu bestimmen übrig. Dieselbe liegt in der ersten Kantenzone, denn von d über γ, o', d^0 und g nach d ist eine Kantenparallelität vorhanden. Würde die Fläche π noch auftreten, so würde π die Kante γ/γ abstumpfen, γ liegt also in der Diagonalzone von π. Ziehen wir daher die Sektionslinie γ in Fig. 20, so erhalten wir

$$\gamma = \overline{\underline{|\, c : \tfrac{1}{3}a' : \tfrac{1}{4}b \,|}}.$$

Vergleichen wir die Projektionsfigur (Fig. 20) mit der des Feldspathes (Tab. III. Fig. 5.), so sind sämmtliche Flächen bereits schon dort deducirt. Beide Figuren stimmen also vollkommen überein, nur sind die Winkel in beiden verschieden, und beim Feldspath einige Flächen mehr gezeichnet, die wir jedoch noch in die Augitfigur einziehen könnten, weil sie fast alle auch beim Augit vorkommen. So z. B. das Augitpaar n aus der Diagonalzone der Schiefendfläche d^0, in Fig. 20 Tab. VII mit punktirten Linien gezeichnet, den Flächen n und n' im Feldspathe entsprechend.

Feldspath.

Haben wir das System des Augites verstanden, so werden wir auch leicht den Feldspath in seiner systematischen Stellung erkennen. Wir dürfen nur kurz auf das Beispiel zur Zonenlehre (pag. 92.) und auf die Fig. 1—5

Tab. III. zurückweisen. Gehen wir vom Hendyoeder $TT'P$ aus, welches mit x ein Oktaid bildet, so lag P auf der Vorder- und x auf der Hinterseite, denn wir sehen die Hauptflächen des Systems in der ersten Kantenzone P/T auftreten. Alle Flächen mit gleichen Buchstaben bezeichnet, abgesehen von den gestrichelten Zeichen (die wir oben nur einführten, um die einzelnen Krystallräume von einander unterscheiden zu können) sind physikalisch gleich. Daher ist die Säule $T/T' = T/T$ eine geschobene vierseitige Säule (mit gleichen Krystallräumen), die Schiefendfläche P und die Gegenfläche x treten nur ein Mal auf. Das Oktaid, von dem wir ausgehen, ist also, wie beim Augit, 2+1+1 flächig. Das augitartige Paar o liegt auf der hintern Seite, denn es stumpft die scharfe Endkante des Hendyoeders ab; die Kante o/T macht also mit der stumpfen Säulenkante T/T einen scharfen Winkel. Die Flächen o im Feldspath entsprechen genau den Flächen o' im Augit. In der ersten Kantenzone liegt ausserdem noch das Flächenpaar m, allein auf der Vorderseite, weil es die stumpfen Endkanten des Hendyoeders abstumpfte; es entspricht dem Augitpaare g im Augit. Unterhalb o auf der Hinterseite folgt ein Flächenpaar u, stumpft die scharfe Hendyoederendkante ab, und liegt ausserdem in der Diagonalzone von y. Da y im Feldspath dem π im Augit entspricht, so mufs auch das Flächenpaar u im Feldspathe dem Flächenpaare γ im Augit entsprechen. Anderer Analogieen nicht zu erwähnen, die aus den Projektionsfiguren des Feldspathes und Augites unmittelbar hervorgehen.

Auch bei der Hornblende (Tab. III. Fig. 8—11) liefse sich ganz dieselbe Analogie bis in die einzelnsten Krystallräume nachweisen, doch überlassen wir dies dem Leser.

Datolith.

Die Datolithfiguren (Tab. VII. Fig. 23 und 24) sind in ihrer Horizontalprojektion auf die Axenebene ac gezeich-

net, so daſs Fläche ν die rechte, x die vordere und x' die hintere Seite bezeichnen. Am bequemsten gehen wir vom 2+1+1 flächigen Oktaeder $\nu\nu xx'$ aus, und legen die Axe, wie die Projektionsfigur (Fig. 25) zeigt. Dann ist

$$\nu = |\overline{b : c : \infty a}|$$

$$x = |\overline{a : c : \infty b}|$$

$$x' = |\overline{a : c : \infty b}|.$$

Die Gradendfläche P ist dabei zur Projektionsebene genommen, denn sie liegt in den Sektionslinien ν/ν und x/x', wie aus der Parallelität dieser Linien folgt; daher

$$P = |\overline{c : \infty a : \infty b}|.$$

Die Säulenflächen M fallen in je zwei gegenüberstehende Endkanten des Hauptoktaeders, daher

$$M = |\overline{a : b : \infty c}|.$$

Wir haben also ein Oktaid mit den drei zugehörigen Hexaidflächen bekommen (A. §. 62). Daraus folgen nun leicht alle übrigen Flächen durch Deduktion.

Untersuchen wir für diese Stellung und Bezeichnung des Krystalls die Axenwinkel, so zeigt sich b gegen c und gegen a noch genau rechtwinklich, nur die Axenhälfte c ist gegen die hintere Axenhälfte a' unter einem Winkel von 88° 19′ geneigt, der also von einem rechten nur um 1°41′ abweicht. Eine weitere Folge davon ist, daſs die Endfläche P in Beziehung auf ihre Säule M/M keine wahrhafte Gradendfläche ist, denn sie schneidet die M nicht rechtwinklich, sondern vorn zu jeder Seite unter 91°3′, folglich hinten unter 88°57′. Die Krystallräume MMP bilden also in Rücksicht auf die Beschaffenheit ihrer Winkel ein wahrhaftes Hendyoeder. Vergleichen wir jedoch das Hendyoeder mit dem Hendyoeder (TTP) des Feldspathes, so zeigt sich, daſs nicht die Flächen MMP, sondern MMx des Datoliths in Hinsicht auf ihren Axenausdruck mit denen

des Feldspathes übereinstimmen. Daher nennt man nicht P, sondern x vorzugsweise die Schiefendfläche; während man P als eine nur wenig schiefe Endfläche in Hinsicht auf ihre Analogie im Axenausdrucke mit den Gradendflächen der vorhergehenden (2-, 3-, 4- und 6gliedrigen) Systeme auch Gradendfläche nennen kann. Zuweilen dehnen sich die glänzenden Säulenflächen M und die matte und drusige Schiefendfläche x zu einem vorherrschenden Hendyoeder aus. Tritt die Schiefendfläche zurück, und werden die ν vorherrschend, so schärfen sie das Säulenende zu, doch ist ihre Kante ν/ν nicht horizontal, sondern ein wenig nach vorn gegen die Horizontalebene geneigt. Die ν schneiden daher die anliegenden Säulenflächen M unter, wenn auch wenig, verschiedenen Winkeln, sind daher nicht ganz gerade auf die Seitenkanten der Säule aufgesetzt.

Flächen, welche die Diagonalzonen des Oktaeders ($\nu\nu x x'$) einsetzen, sind

$$a = \overline{|b : \infty a : \infty c|}$$

$$b = \overline{|a : \infty b : \infty c|}.$$

Beide stumpfen die Säulenkanten der Säule ab, b die vordere scharfe von $77\frac{1}{2}^\circ$, a die seitliche stumpfe von $102\frac{1}{2}^\circ$.

Sehr vorherrschend zeigt sich ein hinteres augitartiges Paar s in der Diagonalzone von x' gelegen, daher läuft die Kante s/s wie die hintere Gegenfläche x', durch welche sie abgestumpft wird. Auf der Vorderseite entspricht diesem Paare in der Diagonalzone von x das augitartige Paar ϱ. Die Fläche ϱ liegt aber zugleich noch in der Diagonalzone von ν, daher

$$\varrho = \overline{|a : b : c|}.$$

Die Sektionslinie von ϱ geht der Sektionslinie M parallel, es stumpft also ϱ die Kante P/M ab, wie aus der Kantenparallelität von $P r \varrho M$ Fig. 23. folgt. Wiewohl dem Axenzeichen gemäfs man 4 gleiche Krystallräume erwarten möchte, so treten doch die hintern 2 nie auf, son-

dern nur das vordere augitartige Paar, zum Beweise, dafs das System entschieden 2+1gliedrig ist.

Unterhalb des augitartigen Paares s findet sich (Fig. 23.) ein zweites σ, das in der Diagonalzone von ν liegt, denn Kante ϱ/σ ist durch ν abgestumpft; aufser dem noch in der Kantenzone x'/ν (ν ist aber nicht das in der Figur sichtbare der rechten, sondern das der linken Krystallseite) des Hauptoktaeders. Folglich ist

$$\sigma = \overline{\underline{|\tfrac{1}{2}a' : b : c|}}.$$

Daraus folgt denn auch das darüberliegende s. Denn aufser dem, dafs s in der Diagonalzone von x' liegt, stumpft s noch die Kante P/σ ab, wie aus der Kantenparallelität von $Ps\sigma g$ hervorgeht. Daher ziehen wir durch den Punkt a' die Sektionslinie $s \ldots s$ der $\sigma \ldots \sigma$ parallel, woraus

$$s = \overline{\underline{|a' : 2b : c|}}$$

folgt. Da die Fläche g in derselben Zone (Vertikalzone) liegt, aufserdem aber in die Säulenzone M/M fällt, so dürfen wir nur durch den Mittelpunkt die Sektionslinie $g \ldots g$ der $s \ldots s$ parallel ziehen, um die Säulenfläche

$$g = \overline{\underline{|a : 2b : \infty c|}}$$

zu erhalten.

Vorn oberhalb ϱ liegt ein augitartiges Paar r mit $M\varrho P$ in eine Vertikalzone und mit $x\nu M$ in die Kantenzone des Oktaeders fallend, daher

$$r = \overline{\underline{|2a : 2b : c|}}.$$

Woraus dann weiter Fläche n oberhalb ν folgt, da sie mit P und ν in eine Vertikalzone fällt, und zu gleicher Zeit die Kante r/s abstumpft; also

$$n = \overline{\underline{|2b : c : \infty a|}}.$$

Hiermit ist die Deduktion der Flächen Fig. 23. vollendet. Alle übrigen Flächen, welche in Fig. 24. noch gezeichnet sind, sind mit wenigen Worten entwickelt.

Vorn in der Diagonalzone von ν stumpft π die Kante ϱ/ν ab. Ihre Sektionslinie liegt also im Axenpunkte b zwischen den Sektionslinien ν und ϱ, sie wird also nach $2a$ gehen, wie aus der zweiten Zone M/n folgt, wonach sie zwischen den Sektionslinien n und M liegen mufs. Daher

$$\pi = \overline{\underline{|b : 2a : c|}}.$$

Ueber π in der Diagonalzone von n liegt p, die Kante zwischen P/π abstumpfend, also

$$p = \overline{\underline{|2b : 4a : c|}}.$$

Wie π zwischen ϱ und ν, so liegt p zwischen r und n, was ihre Sektionslinie bestätigt.

Auf der Hinterseite liegt zwischen n und s die Fläche r'. Da Sektionslinie s vom Punkte $2b$ nach a' verläuft, und n von demselben Punkte $2b$ nach $\infty a'$, so werden wir die Sektionslinie r' von $2b$ aus nach $2a'$ ziehen. Was wir vermuthen bestätigt die Kantenzone x'/ν, durch welche eine solche Sektionslinie gehen mufs; und in Fig. 24. sehen wir auch wirklich zwischen $r'\nu M$ eine Kantenparallelität, welche der Zone $x'\nu$ entsprechen mufs, da die Sektionslinien sämmtlicher 4 Flächen $(x'\nu r' M)$ sich in einem Punkte schneiden. Hieraus ergibt sich

$$r' = \overline{\underline{|2a' : 2b : c|}}.$$

Dieses Flächenpaar entspricht in Hinsicht auf sein Zeichen genau dem vordern Flächenpaare r. Allein beide Paare sind entschieden physikalisch verschieden, sie treten auch nur selten zugleich auf, sondern bald fehlt dem Krystalle das vordere, bald das hintere Paar.

Aehnlich den r und r' verhalten sich die Paare μ und μ'. Beide liegen in der Diagonalzone von ν; μ aber auf der Vorderseite zwischen g und r, daher

$$\mu = \overline{\underline{|b : \tfrac{2}{3}a : c|}};$$

μ' hingegen auf der Hinterseite zwischen g und r', daher

$$\mu' = \overline{\underline{|b : \tfrac{2}{3}a' : c|}}.$$

Auch diese Paare sind entschieden physikalisch different; μ vorn ist gewöhnlich spiegelflächig glänzend, μ' hinten aber drusig. Auf der Hinterseite kommen in der Diagonalzone von n noch eine Reihe von Flächen vor, die zum Theil nicht durch eine zweite Zone zu bestimmen waren. So findet sich z. B. zwischen s und r' eine Fläche m', die ferner mit P und μ' in einer Zone liegen würde; folglich ihr Ausdruck

$$m' = \overline{|2b:\tfrac{4}{3}a':c|} = \overline{|b:\tfrac{2}{3}a':\tfrac{1}{2}c|}.$$

Unter s liegt eine Fläche l, wahrscheinlich

$$l = \overline{|2b:\tfrac{2}{3}a':c|} = \overline{|b:\tfrac{1}{3}a':\tfrac{1}{2}c|}.$$

Darunter noch eine Fläche v, die a' unter noch einem kleinern Verhältnifse schneiden mufs, vielleicht zu $\frac{1}{2}a'$ gehend.

Endlich kommt auf der Vorderseite noch häufig eine untere Schiefendfläche ξ vor, sie fällt mit P und x in eine Vertikalzone und in die Kantenzone von M/ν, daher

$$\xi = \overline{|c:\tfrac{1}{2}a:\infty b|}.$$

Vergleichen wir die Projektionsfigur (Fig. 25.) mit der des Augites (Fig. 20.), so zeigt sich in beiden ein verschiedener Entwickelungsgang. Während die Augitfigur gar keine Sektionslinie hat, die der Axe a parallel geht, treten in der Datolithfigur mehrere (n, v) auf. Durch diese Linien, Flächen aus der seitlichen Vertikalzone angehörend, wird der Datolith den 2 und 2gliedrigen Systemen, z. B. dem Topase (Fig. 1.), sehr verwandt, zumal da diese Flächen zu beiden Seiten der Axe a unter einander physikalisch gleich sind. Wir sehen im Datolith selbst Oktaederflächen auftreten (r, ϱ), allein diese sind entschieden, wenn sie auch auf der Hinterseite (z. B. r') vorkommen, von dem vordern gleichnamigen different. Eine solche Differenz spricht sich ferner noch in den Zonenpunkten vor und hinter der Axe b aus. Denn wenn auch die

hauptsächlichsten Zonenpunkte vor wie hinter der Axe auftreten, so gehören doch den vordern viel weniger und physikalisch andere Flächen an, als den hintern Zonenpunkten, was in Fig. 1. durchaus nicht der Fall ist. Der Datolith tritt daher den 2 und 2gliedrigen Systemen viel näher, als Augit, Hornblende und Feldspath, aber zeigt dennoch entschieden einen 2 und 1gliedrigen Charakter.

Wiewohl es nie einen wesentlichen Unterschied macht, ob ein Krystall nach dieser oder jener Richtung ausgedehnt erscheint, so ist man doch immer gewohnt, den Krystall nach einer bestimmten Richtung (Zone) ausgedehnt zu sehen. So ist häufig der Datolith nach der Säule M/M verlängert; doch wird man auch nicht selten Krystalle begegnen, worin die Flächen ν/ν und n/n durch vorherrschende Ausdehnung die Rolle der Säule übernehmen. Dem weniger Geübten macht der Krystall in solcher veränderten Stellung gewöhnlich grofse Schwierigkeit, weil jetzt die Endflächen der neuen Säule sich gegenwärtig anders gruppiren, als das bei der Säule M/M der Fall war. Wie P zur Säule M/M die Gradendfläche bildet, so wird in dieser veränderten Stellung die der Sektionslinie b entsprechende Fläche die Gradendfläche zur Säule n/n bilden. Denken wir demnach sämmtliche Flächen auf letztere Gradendfläche (Axenebene bc) projicirt, so wird die neue Projektionsfigur der ersten ganz analog werden; wir werden zur Linken und Rechten dieselben Zonenpunkte finden, aber die Vorder- wird von der Hinterseite verschieden sein, die Schiefendflächen (x, x', ξ) verhalten sich gegen ihre neue Säule analog, nur sind sie unter andern Winkeln auf die Säulenkante aufgesetzt. Aus der grofsen Analogie beider Stellungen geht hervor, dafs es zuletzt ganz gleichgültig wird, welcher von diesen beiden Richtungen wir den Vorzug geben wollen.

Nicht so ist es mit der dritten Stellung, wenn sich die Flächen x und x' zu einer unsymmetrischen Säule ausdehnen; denn diese Säule kann keine geschobene viersei-

tige werden, weil die beiden Krystallräume (x und x') physikalisch different sind. Die Axenebene ac würde an ihr zur Gradendfläche werden, und projicirten wir auf selbige alle übrigen Flächen, so würde in der Figur keine Schiefendfläche erscheinen. In dieser Stellung heifst das System ein *gewendetes zweiundeingliedriges* System. Beim

Epidot

tritt diefs Verhältnifs am deutlichsten hervor. Er erscheint nach den Schiefendflächen *M, T, l* (Fig. 27) lang gezogen, auf welche unsymmetrische Säule die augitartigen Paare und die wahrhaften Säulenflächen nach jeder Seite unter ungleichen Winkeln aufgesetzt sind (x gegen b anders geneigt als gegen M). Um die Zonenverhältnifse befser zu übersehen, ist in Fig. 28 die horizontale Projektion auf der Gradendfläche der unsymmetrischen Säule dargestellt. Wenden wir den Krystall nach seiner geschobenen Säule n/n aufrecht, und projiciren sämmtliche Flächen auf die Gradendfläche dieser Säule (Fig. 26), so erhalten wir folgende Flächenausdrücke:

$$n = \overline{\underline{|a : b : \infty c|}}$$

$$b = \overline{\underline{|a : \infty b : \infty c|}}$$

$$M = \overline{\underline{|c : \tfrac{1}{3}a' : \infty b|}}$$

$$T = \overline{\underline{|c : \tfrac{1}{5}a : \infty b|}}$$

$$l = \overline{\underline{|c : \tfrac{1}{13}a : \infty b|}}$$

$$d = \overline{\underline{|a : \tfrac{1}{4}b : c|}}$$

$$o = \overline{\underline{|\tfrac{1}{3}a' : \tfrac{1}{8}b : c|}}$$

$$u = \overline{\underline{|\tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{4}b : c|}}$$

$$z = \overline{\underline{|\tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{8}b : c|}}$$

$$x = \overline{\underline{|\tfrac{1}{11}a' : \tfrac{1}{8}b : c|}}$$

$$y = \overline{\underline{|\tfrac{1}{13}a : \tfrac{1}{8}b : c|}}$$

$$q = \overline{\underline{|\tfrac{1}{13}a : \tfrac{1}{16}b : c|}}$$

Ausser diesen 12 Flächenausdrücken sind in der Projektionsfigur (Fig. 26) noch gezogen

$$e = \overline{\underline{|a : 2b : \infty c|}}$$

$$s = \overline{\underline{|\tfrac{1}{11}a' : c : \infty b|}}$$

$$P = \overline{\underline{|b : \infty a : \infty c|}}$$

$$h = \overline{\underline{|\tfrac{1}{3}a' : \tfrac{1}{4}b : c|}}$$

$$g = \overline{\underline{|a : c : \infty b|}}.$$

Uebergehen wir die Frage, wie wir zu dieser Projektionsfigur gekommen sind, und suchen wir nur den Beweis, ob die Projektionsfigur wirklich den beiden Krystallen entspricht; so zeigen sich zuerst in der hintern Schiefendfläche *M* (Fig. 26) fünf Zonen. Von ihnen entsprechen zu beiden Seiten von *a'* die Hauptzonen *Mxnqzd* genau den Krystallen, denn wir sehen Fig. 27 von *M* aus links über *xnqz* und rechts über *dzqn* eine Kantenparallelität. Die Vertikalzone *MblT* (Fig. 26) entspricht der Horizontalzone *MblT* (Fig. 27). Gehen wir zu den 5 Zonenpunkten in der Schiefendfläche *T*, so können wir in Fig. 28 den mittlern von *T* nach *u* über *z* verfolgen, wäre *P* noch vorhanden (durch punktirte Linien angedeutet), so würde dadurch die weitere Kantenparallelität nach *z* und *u* eingesetzt. Die beiden Hauptzonenpunkte zur Seite von *a* (Fig. 26) lafsen sich (Fig. 28) von *T* über *dony* deutlich verfolgen. Auch von der dritten Säulenfläche *l* aus sind die Zonenpunkte *lnz*, und der Zonenpunkt *lyq*, der durch ein vorhandenes *P* nach *q* und *y* sich fortsetzen würde, deutlich zu erkennen. Zuletzt bleibt noch die Säulenfläche (Fig. 27) *b* über mit einer deutlichen Zone nach *n* und *n*, dem Mittelpunkte *l* (Fig. 26) entsprechend, und mit seitli-

chen Hauptzonen von b nach $xozy$. Wir sehen bereits so viel Zonenpunkte mit den Krystallfiguren übereinstimmen, dafs jede Sektionslinie in zwei bekannte Zonenpunkte fällt. Daraus läfst sich der sichere Schlufs ziehen, dafs die Projektionsfigur den Krystallen genau entsprechen mufs.

Wollten wir noch weitere Flächen in die Krystalle (Fig. 27 und 28) eintragen, so dürfen wir nur unsere Projektion zu Rathe ziehen. P, die Abstumpfungsfläche der stumpfen Säulenkante n/n kommt häufig vor, ihre Sektionslinie entspricht der Axe $a \ldots a$. Wollten wir also diese Fläche in Fig. 28 eintragen (durch die punktirten Linien ist die Fläche P angedeutet), so müfste sie zunächst die stumpfe Säulenkante n/n abstumpfen, welche, da b die scharfe abstumpft, in Fig. 28 die sichtbare n/n ist. Wir ziehen also irgend eine punktirte Kante P/n der n/n parallel; dieselbe kreuzt sich mit Kante n/q. Die Fläche P fällt aber zwischen q/q und y/y, liegt also mit q/y in einer Zone, wie der Diagonalzonenpunkt von l (Fig. 26) beweist, folglich mufs die punktirte Linie P/q auf der Fläche q der Kante q/y parallel gehen. Erreicht diese Linie die q/z, so sagt die Projektionsfigur weiter, dafs P im Diagonalzonenpunkte von T zwischen z/z und u/u liegt, also fällt P mit Kante z/u in eine Zone, so dafs auch die dritte punktirte Linie P/z der Kante z/u parallel gezogen werden mufs. Kreuzt nun diese letztere Kante die z/n, so ziehe ich auf n vom Kreuzungspunkte die punktirte Linie P/n der ersten P/n und auf q die P/q der erstern P/q parallel. Verbinde ich zuletzt beide noch übrigen Punkte durch die Linie P/z, so geht auch diese der erstern z parallel.

Diese und ähnliche Betrachtungen lassen sich anstellen, ohne dafs man über die Stellung der Krystalle weiter nachdenkt. Will man nun auch sich von der Stellung der Krystalle genauere Rechenschaft geben, so geht man vom Mittelpunkte (n/n) der Projektionsfigur aus, und zwar so, dafs T eine vordere und M eine hintere Schiefendfläche

bilden. Die vier Flächen bilden dann ein 2+1+1flächiges Oktaeder in der Säulenstellung genommen, die versteckte Kante der Oktaedersäule nach vorn und hinten gekehrt (man nehme ein einfaches Oktaeder in vorgeschriebener Stellung zur Hand!). Fläche b ist eine zugehörige Hexaidfläche (in den Kanten n/n und T/M gelegen), sie stumpft also die versteckte Säulenkante n/n, in der vordern und hintern Oktaidfläche gelegen, ab. Die beiden andern zugehörigen Hexaidflächen sind d und d, denn jede fällt von T nach n und M nach n in eine Zone; sie stumpfen also die beiden übrigen Oktaidecken ab. Gerade diefs sind die am Epidot am häufigsten auftretenden Flächen, und hiermit ist uns der Weg zu einer vollständigen Deduktion und zu einer naturgemäfsen Stellung eröffnet. Denn wir dürfen jetzt nur den Zonenzusammenhang mit dem des Feldspathes, der Hornblende und des Augites (Fig. 20) verfolgen, um sogleich einzusehen, dafs in allen derselbe Entwickelungsgang ist, nur dafs beim Epidot der gröfsere Flächenreichthum eintritt.

Wegen des Flächenreichthums ist der Epidot eines der schönsten Uebungsbeispiele für die Zonenpunktgesetze. Was beim Feldspath P war, ist hier g, die Schiefendfläche; sie bildet mit n die erste Kantenzone g/n. Die hintere Gegenfläche kommt nicht vor, statt defsen findet sich M, die mit der Säule n die zweite Kantenzone $M/n = (\frac{1}{3}a' + \frac{1}{3}b)$ einsetzt, worin die Hauptflächen des Systems (d, z, q, n, x) liegen. Dann kommt vorn wieder die 3te Kantenzone $T/n = (\frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b)$; hinten die 4te Kantenzone $h/n = (\frac{1}{7}a' + \frac{1}{7}b)$; vorn die 5te $u/n = (\frac{1}{9}a + \frac{1}{9}b)$; hinten die 6te $s/n = (\frac{1}{11}a' + \frac{1}{11}b)$; vorn die 7te $l/n = (\frac{1}{13}a + \frac{1}{13}b)$. Diefs gibt die Zahlenreihe

$$\frac{1}{1},\ (\tfrac{1}{3}),\ \frac{1}{5},\ (\tfrac{1}{7}),\ \frac{1}{9},\ (\tfrac{1}{11}),\ \frac{1}{13},\ (\tfrac{1}{15}),\ \frac{1}{17}\ \text{etc.},$$

von denen die eingeklammerten nur auf der Hinterseite liegen und nie vorn vorkommen, während die nicht eingeklammerten nur auf der Vorderseite liegen und nicht hin-

ten erscheinen. Alle diese Punkte bestimmen sich der Reihe nach durch einfache Adition und Subtraktion. Der Punkt

$\frac{1}{1} = \frac{1}{4-3}$, auf der Sektionslinie h;

$\frac{1}{3} = \frac{1}{4-1}$, — — — — d;

$\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1}$, — — — — d;

$\frac{1}{7} = \frac{1}{4+3}$, — — — — h;

$\frac{1}{9} = \frac{1}{5+4}$, — — — — u;

$\frac{1}{11} = \frac{1}{3+8}$, — — — — o;

$\frac{1}{13} = \frac{1}{5+8}$, — — — — z;

$\frac{1}{19} = \frac{1}{11+8}$, — — — — x;

$\frac{1}{21} = \frac{1}{13+8}$, — — — — y;

$\frac{1}{29} = \frac{1}{13+16}$, — — — — q.

Mit derselben Leichtigkeit finden wir die Axenlängen der Sektionslinien, wenn die Kantenzonenpunkte bekannt sind. Die d, in den Kantenzonen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ gelegen, mufs die zwischenliegende Axe b in $\frac{1+1}{5+3} = \frac{1}{4}$, die ausserhalb liegende a in $\frac{1+1}{5-3} = 1$ schneiden. Die z, in den Kantenzonen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{13}$ gelegen, mufs die zwischenliegende Axe b in $\frac{1+1}{13+3} = \frac{1}{8}$, die ausserhalb liegende a in $\frac{1+1}{13-3} = \frac{1}{5}$ schneiden. Die x, in der Diagonalzone von s gelegen, schneidet a' in $\frac{1}{11}$, ausserdem in die Kantenzone $\frac{1}{3}$ fallend, schneidet sie b in $\frac{1}{11-3} = \frac{1}{8}$.

(cf. WEISS, über die Theorie des Epidotsystemes. Abh. der Berl. Akadem. 1818—1819.)

Der Anfänger möchte vielleicht Anstoſs daran nehmen, daſs wir dem Oktaide *MTnn* solche Axen untergelegt haben, daſs, während *T* die a in $\frac{1}{5}$ schneidet, *M* nach $\frac{1}{3}a'$ geht. Im rechnenden Theile werden wir aber sehen, daſs, wenn man ein Oktaid auf eine beliebige Ebene projicirt (Tab. II Fig. 24 Linie 8, 9, 10, 11), in der beliebigen Projektionsebene durch die Endkantenzonenpunkte (2, 3, 5, 6) zwei Linien (12 und 13) zieht, und den Kreuzpunkt (12.13) mit dem ausserhalb der Projektionsebene liegenden Punkte x (welchen alle projicirten Ebenen mit einander gemein haben) durch eine dritte verbindet, man die drei Linien als die Raumaxen des Oktaides betrachten kann. Werden ferner die Linien 2...5 und 3...6 durch den Kreuzpunkt rational getheilt, so kann man sie auch als Krystallographische Axen betrachten; was in unserem Beispiel der Fall ist. Denn in dem auf eine beliebige Fläche projicirten Oktaide *hhuu*` (Tab. VII. Fig. 26) ist b durch den Mittelpunkt halbirt, a aber verhält sich zu $a' = \frac{1}{5} : \frac{1}{3}$. Dieſs sind aber zugleich die Axen unseres Hauptoktaides *MTnn*, von dem wir ausgingen, folglich müssen sich die Axenausdrücke ergeben, wie wir sie entwickelt haben.

Deduktionsflächen des Eingliedrigen Systems.

Wir sind jetzt in unserer Systematik bis dahin gekommen, wo kein Krystallraum dem andern mehr gleich werden kann; daher treten alle Glieder vereinzelt auf. Alles fällt also den Gesetzen der allgemeinen Zonenlehre wieder anheim, denn das systematische Princip der Gleichheit und Ungleichheit findet keine Anwendung mehr. Jeder Flächenausdruck bezeichnet demgemäſs nur noch einen einzigen Krystallraum. Einige Beispiele werden das Gesagte beweisen.

A x i n i t.

Der Axinit erscheint in einer geschobenen Säule *P*/*u* (Tab. VII. Fig. 29 und 30), mit ungleicher physikalischer Beschaffenheit; denn *u* ist gewöhnlich parallel der Säulenkante stark gestreift und etwas drusig, *P* aber in gleicher Richtung kaum sichtbar gestreift und glatt. An dieser Säule bildet *r* eine *doppelt schiefe Endfläche*, denn *r* macht mit *P* andere Winkel als mit *u*, ihre deutliche Streifung geht der Kante *P*/*r* parallel. Die drei Krystallräume *Pur* schliefsen also ein 1+1+1kantiges Hexaid ein, welches man nach irgend einer der drei Richtungen aufrecht gestellt denken kann, ohne dafs eine Stellung vor der andern einen Vorzug hätte. Kante *P*/*r* ist nie, Kante *P*/*u* selten durch *l*, Kante *r*/*u* gewöhnlich durch *s* abgestumpft. Um den Zonenzusammenhang der Flächen zu ermitteln, suchen wir uns irgend ein Oktaid. Die Flächen *P r s l* (Fig. 29) scheinen dazu am passendsten zu sein; sie bilden ein Oktaid, weil wir vier Endkanten sehen (*P*/*r*, *r*/*s*, *s*/*l*, *l*/*P*). Die Flächen *u* in den Kanten *P*/*l* und *s*/*r*, *M* in den Kanten *P*/*r* und *s*/*l* (Fig. 30) und *σ* in den Kanten *P*/*s* und *r*/*l* gelegen, bilden die zugehörigen Hexaidflächen. Wir wollen diese auf die Fläche *σ* projiciren, ohne auf die Winkelverhältnisse Rücksicht zu nehmen (Fig. 31.).

Fläche *x* fällt in Zone *P*/*s*;

sie würde ausserdem mit *M*/*u* parallele Kanten bilden, wir ziehen daher ihre Sektionslinie *x*.

Fläche *v* liegt in *P*/*u* und *x*/*r*;
y in *P*/*s* und *M*/*v*;
w in *P*/*u* und *y*/*r*;
n in *x*/*v* und *M*/*w*;
c in *n*/*w* und *y*/*x*;
m in *y*/*w* und *v*/*c*;
o in *M*/*w* und *u*/*y*; endlich
r' in *o*/*y* und *P*/*r*.

Tragen wir die Sektionslinien dieser Flächen in Fig. 31 ein, und überschauen nochmals den Zonenzusammenhang, so werden wir uns bald überzeugen, dafs in der Deduktion kein Fehler sein kann. Denn da in der Projektion alle nur möglichen Zonenverhältnisse der Krystalle geschrieben stehen, sie mögen in den Figuren 29 und 30 sichtbar sein oder nicht, so müssen auch diejenigen Zonen stimmen, welche wir nicht zur Deduktion gebraucht haben.

Fläche P fällt in drei Hauptzonen:

$$PwvulP,\ Pr'MrP \text{ und } Pcyxs\sigma P;$$

alle drei lassen sich in Fig. 30 und 31 verfolgen. Fläche r fällt in die zweite dieser drei Zonen, liegt aber ausserdem in vier neuen:

$$rusr,\ rnvxr,\ rymwr \text{ und } r\sigma lr;$$

vorletzte Zone würde in Fig. 30 vollständig sichtbar sein, wenn man Fläche r noch um ein Weniges ausdehnte.

Fläche M liegt ausser der Zone mit P und r noch in vier Zonen:

$$MlsM,\ MxuM,\ MyvM \text{ und } MocwnM.$$

Endlich zeigt Fläche r' noch drei Zonen:

$$r'xlr',\ r'oyur' \text{ und } r'cmvr',$$

und nu bilden mit σ eine.

Durch diese 15 Zonen ist der Krystall vollständig gekannt, alle andern Zonen, die vorkommen können, gehören Schnitten zweier Sektionslinien an, in die keine dritte fällt.

Nachdem die Projektion vollendet ist, können wir mit Leichtigkeit überschauen, welche Deduktionswege etwa noch eingeschlagen werden konnten. In Fig. 30 zeigt das Parallelogramm m, dafs die anliegenden Flächen $cyvw$ ein Oktaid bilden, zu welchem m die zugehörige Hexaidfläche ist. Auf der Projektionsfigur zeigt sich, dafs M und P die beiden übrigen zugehörigen Hexaidflächen bilden. Ist aber $cyvw$ ein Oktaid, MPm das zugehörige Hexaid, so sind r und r', welche die Hexaidkante P/M mit den Ok-

taidkanten y/w und c/v verbinden, zugehörige Dodekaidflächen, und jetzt können wir versichert sein, dafs auch auf diesem Wege eine vollständige Deduktion möglich ist.

Oder wir sehen links oben am Rande der Fig. 30 ein Parallelogramm o durch das Oktaid $Mr'yc$ gebildet, o selbst nebst v und P sind die zugehörigen Hexaidflächen. Von den drei Hexaidkanten c/v, P/o und P/v ist nur die letzte durch Flächen ausgezeichnet, namentlich durch die Dodekaidflächen u und w. Also ist auch dieses ein durchzuführender Weg.

Wollten wir vom Oktaide $uxnP$ ausgehen, zu welchem v die zugehörige Hexaidfläche bildet, so würde σ die zweite sein, aber die dritte fehlen. Da nun in der Hexaidkante σ/v keine weitere Fläche liegt, so ist auch keine Deduktion ausführbar. Würden wir jedoch die dritte Hexaidfläche uns ziehen $(a...a')$, so ginge diese durch Punkt $c.v$ den Sektionslinien r und l parallel; folglich wären r,l und c zugehörige Dodekaidflächen, die abermals einen Weg zu einer vollständigen Deduktion eröffnen.

Legen wir dem Krystalle schiefwinkliche Axen unter, so ist es bei seiner grofsen Unsymmetrie ganz gleichgültig, von welchem wir ausgehen. Wären etwa a und b die Axeneinheiten, so ergäben sich mit Hülfe der Kantenzonenpunkte folgende Ausdrücke:

$$M = \underline{\overline{|a:b:\infty c|}}$$

$$u = \underline{\overline{|a:b':\infty c|}}$$

$$x = \underline{\overline{|a:\infty b:\infty c|}}$$

$$l = \underline{\overline{|b':c:\infty a|}}$$

$$r = \underline{\overline{|b:c:\infty a|}}$$

$$s = \underline{\overline{|a:c:\infty b|}}$$

$$P = \underline{\overline{|a':c:\infty b|}}$$

$$\sigma = \overline{\underline{|c : \infty a : \infty b|}}$$
$$n = \overline{\underline{|a' : b : c|}}$$
$$c = \overline{\underline{|\tfrac{1}{2}a' : c : \infty b|}}$$
$$r' = \overline{\underline{|\tfrac{1}{2}a' : b' : c|}}$$
$$v = \overline{\underline{|\tfrac{1}{2}a' : b : c|}}$$
$$y = \overline{\underline{|\tfrac{1}{3}a' : c : \infty b|}}$$
$$w = \overline{\underline{|\tfrac{2}{3}a' : 2b : c|}}$$
$$o = \overline{\underline{|\tfrac{2}{5}a' : 2b' : c|}}$$
$$m = \overline{\underline{|\tfrac{1}{2}a' : 3b : c|}}$$

Alle diese einfachen Ausdrücke sieht man unmittelbar, oder folgen durch Addition, z. B. r' hat $\frac{1}{1+1}\, a' = \frac{1}{2}a'$; w hat $\frac{2}{1+2}a' : \frac{2}{2-1}b$; o hat $\frac{2}{2+3}a' : \frac{2}{3-2}b'$; nur m, in den Zonenpunkten $(\frac{1}{2}a' + 0b)$ und $(\frac{1}{3}a' + b)$ gelegen, mufs man durch Rechnung finden. Es ist in A. §. 70. $m = 2$, $n = \infty$; $m' = 3$, $n' = 1$; folglich haben wir die Axenausdrücke

$$\frac{\infty . 3 - 1 . 2}{2 . 3\,(\infty - 1)}\, a' \;:\; \frac{\infty . 3 - 1 . 2}{\infty . 1\,(3 - 2)}\, b$$
$$\frac{3 - 0}{2 . 3\,(1 - 0)}\, a' \;:\; \frac{3 - 0}{1\,(3 - 2)}\, b$$
$$\tfrac{1}{2}a' \;:\; 3b.$$

Solcher Axensysteme kann man noch unendliche finden, für jede beliebige Stellung, von denen keine vor der andern einen Vorzug haben würde. Nur diejenige würde vor allen auszuzeichnen sein, für welche sich die Axen möglichst den rechtwinklichen nähern. Hier wollen wir nur (da die naturgemäfsesten Axen zu finden, die Hauptaufgabe der rechnenden Krystallographie bildet) historisch erwähnen, dafs Neumann (Ueber das Krystallsystem des

Axinits, Poggendorf's Annalen 4ter Band) durch Messungen dargethan hat, dafs dem Flächensysteme des Axinits wirklich drei rechtwinkliche Axen untergelegt werden können, da die Neigung von P gegen M nur um $5'$ vom rechten Winkel abweicht, eine Differenz, die ausserhalb der Beobachtungsgränzen liegt. Stellt man also den Krystall nach der Zone P/l aufrecht, nimmt zur Hauptaxe c eine Linie, die dieser Säule parallel geht, zieht Axe b senkrecht gegen P, und Axe a senkrecht gegen b und c, so bekommen alle Flächen an diesem rechtwinklichen Axenkreuze rationale aber ziemlich complicirte Ausdrücke. Wir haben Fig. 32 den Krystall auf die Ebene der rechtwinklichen Axen $a\,b$ projicirt, und gehen vom Oktaide $PuMy$ aus. Weil die Figur zu ausgedehnt würde, so haben wir a' verkürzt und M in einem Bogen gezogen. Die sechs Zonenpunkte des Oktaides sind: $P.M$, $P.u$, $M.u$, $P.y$, $y.u$, $M.y$; die rechtwinklichen Axen verhalten sich zum Oktaide so, dafs

$$P = |b : \infty a : \infty c|$$

$$u = |a : b : \infty c|$$

$$M = |a' : c : \infty b|$$

$$y = |\tfrac{1}{8}a : \tfrac{1}{2}b : c|$$

wird; dabei ist aber die Projektionsebene eine Ebene, die bis jetzt im Axinitsysteme nicht beobachtet wurde. Wenn diese Axenausdrücke durch Rechnung einmal ermittelt sind, so folgen alle übrigen Ausdrücke aus den Zonengesetzen, denn in Fig. 31 gehört das Oktaid zu denjenigen, aus welchen eine vollständige Deduktion möglich ist. Ein Vergleich beider Projektionsfiguren zeigt uns, dafs in beiden dieselben Zonenpunkte vorhanden sind, wir dürfen daher nur nach Anleitung der Fig. 31 die weitern Linien in Fig. 32 ziehen *). Sektionslinie r' liegt im Axenpunkte

*) Dem Anfänger, der durch die Bogen- und verkürzten Li-

a' und im Kantenzonenpunkte $y \cdot u = \left(\frac{a}{8-2} + \frac{b'}{8-2}\right)$
$= (\frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b')$; daher $r' = a' : \frac{1}{6+1} b'$, d. h. Fläche

$$r' = \overline{|a' : \tfrac{1}{7}b' : c|}.$$

Sektionslinie x liegt im Kantenzonenpunkte $M.u = (a' + b)$ und im Axenpunkte $P.y = \frac{1}{8}a$, folglich

$$x = \tfrac{1}{8}a : \frac{1}{8+1}b, \text{ d. h. Fläche}$$

$$x = \overline{|\tfrac{1}{8}a : \tfrac{1}{9}b : c.|}$$

Sektionslinie v liegt in den Zonenpunkten

$$a.b = (0a + 0b) \text{ und } M.y = (a' + \tfrac{9}{2}b),$$

denn man darf nur die Proportion $\frac{1}{8}a : \frac{1}{2}b = \frac{9}{8}a : xb$ ansetzen. Da v durch den Mittelpunkt geht, so sind a' und $\frac{9}{2}b$ die Axenausdrücke von v, folglich Fläche

$$v = \overline{|a : \tfrac{9}{2}b : \infty c|} = \overline{|\tfrac{1}{9}a : \tfrac{1}{2}b : \infty c|}.$$

Sektionslinie r liegt im Axenpunkte a' und im Zonenpunkte $x.v$, der nach Anleitung von A. §. 73 zu suchen:

$$x = \tfrac{1}{8}a : \tfrac{1}{9}b : c;\ v = \tfrac{1}{9}a : \tfrac{1}{2}b : \infty c = \frac{1}{9\infty}a : \frac{1}{2\infty}b : c$$

folglich $m = 8$, $n = 9$; $m' = 9\infty$, $n' = 2\infty$; also

$$\text{Zonenpunkt } x.v = \frac{2\infty - 9}{8.2\infty - 9\infty.9}a + \frac{8 - 9\infty}{8.2\infty - 9\infty.9}b$$

$$= \frac{2 - 0}{8.2 - 9.9}a + \frac{0 - 9}{8.2 - 9.9}b = \tfrac{2}{65}a' + \tfrac{9}{65}b.$$

Da nun der Axenpunkt $a' = a' + 0b$ ist, so ist für die Sektionslinie r

$$m = \tfrac{65}{2},\ n = \tfrac{65}{9};\ m' = 1,\ n' = \infty;$$

---

nien sich etwa verwirren sollte, rathen wir, die Axe a' gehörig lang zu nehmen, und M durch a' in gerader Linie zu ziehen, dann werden auch die Zonenpunkte in M ihre gehörige Lage erhalten. Der Geübte findet sich leicht hinein.

dieses in den allgemeinen Formeln A. §. 70 substituirt, gibt:

$$r = \frac{\frac{65}{9}.1 - \infty.\frac{65}{2}}{\frac{65}{2}.1(\frac{65}{9} - \infty)}a' : \frac{\frac{65}{9}.1 - \infty.\frac{65}{2}}{\frac{65}{9}.\infty(1-\frac{65}{2})}b$$

$$= \frac{0 - \frac{65}{2}}{\frac{65}{2}(0-1)}a' : \frac{0 - \frac{65}{2}}{\frac{65}{9}(1-\frac{65}{2})}b = a' : \frac{9}{2-65}b,$$

d. h. Fläche $r = \overline{|a' : \frac{1}{7}b : c|}$.

Sektionslinie s liegt in der Axe $\frac{1}{8}a$ und im Kantenzonenpunkte $r.u = \frac{1}{1+7} = \frac{1}{8}$, folglich wird b von ihr in $\frac{1}{8+8}$ geschnitten, d. h. Fläche

$$s = \overline{|\tfrac{1}{8}a : \tfrac{1}{16}b : c|}.$$

Sektionslinie l liegt im Zonenpunkte $a.b = (0a + 0b)$ und im Punkte $M.s = (a' + \frac{9}{16}b)$, also Fläche

$$l = \overline{|a : \tfrac{9}{16}b : \infty c|} = \overline{|\tfrac{1}{9}a : \tfrac{1}{16}b : \infty c|}.$$

Sektionslinie c liegt im Zonenpunkte $r'.v$;

$r' = a' : \frac{1}{7}b'$, $v = \frac{1}{9.\infty}a : \frac{1}{2.\infty}b$, folglich
$m = 1$, $n = 7$; $m' = -9\infty$, $n' = -2\infty$, und

$$r'.v = \frac{-2\infty - 7}{1.(-2\infty) + 9\infty.7}a' + \frac{1 + 9\infty}{1.(-2\infty) + 9\infty.7}b'$$

$$= \frac{-2-0}{-2+9.7}a' + \frac{0+9}{-2+9.7}b' = \tfrac{2}{61}a + \tfrac{9}{61}b'.$$

Da c ferner im Axenpunkte $(\frac{1}{8}a + 0b')$ liegt, so ist für c
$m = \frac{61}{2}$, $n = \frac{61}{9}$; $m' = 8$, $n' = \infty$, folglich

$$c = \frac{\frac{61}{9}.8 - \infty.\frac{61}{2}}{\frac{61}{2}.8(\frac{61}{9} - \infty)}a : \frac{\frac{61}{9}.8 - \infty.\frac{61}{2}}{\frac{61}{9}.\infty(8 - \frac{61}{2})}b'$$

$$= \frac{0 - \frac{61}{2}}{\frac{61}{2}.8(0-1)}a : \frac{0 - \frac{61}{2}}{\frac{61}{9}(8-\frac{61}{2})}b' = \tfrac{1}{8}a : \frac{-9}{2.8.61}b',$$

d. h. Fläche $c = \overline{|\tfrac{1}{8}a : \tfrac{1}{5}b' : c|}$.

Sektionslinie w liegt im Mittelpunkte, und geht durch den Zonenpunkt $M.c = a' + \frac{9}{5}b'$, folglich Fläche

$$w = \overline{|a : \tfrac{9}{5}b' : \infty c|} = \overline{|\tfrac{1}{9}a : \tfrac{1}{5}b' : \infty c|}.$$

Fläche n liegt in den Zonenpunkten

$$v.x = \tfrac{2}{63}a' + \tfrac{9}{63}b \text{ und } M.c = a' + \tfrac{9}{5}b',$$

daher $m = \tfrac{65}{2}$, $n = \tfrac{65}{9}$; $m' = 1$, $n' = -\tfrac{5}{9}$, also

$$n = \frac{\tfrac{65}{9}.1 + \tfrac{5}{9}.\tfrac{65}{2}}{\tfrac{65}{2}.1(\tfrac{65}{9}+\tfrac{5}{9})}a' : \frac{\tfrac{65}{9}.1 + \tfrac{5}{9}.\tfrac{65}{2}}{\tfrac{65}{9}.(-\tfrac{5}{9})(1-\tfrac{65}{2})}b'$$

$$= \frac{2+5}{65+5}a' : \frac{2+5}{\tfrac{5}{9}(2-65)}b, \text{ d. h. Fläche}$$

$$n = \overline{|\tfrac{1}{10}a' : \tfrac{1}{3}b : c|}.$$

Sektionslinie o in der Kantenzone $y.u = \frac{1}{8-2}$ und in der Zone $M.c = a' + \tfrac{9}{5}b'$ gelegen, hat

$$m = 6,\ n = 6;\ m' = -1,\ n' = \tfrac{5}{9}, \text{ folglich}$$

$$o = \frac{6.(-1)-\tfrac{5}{9}.6}{6.(-1)(6-\tfrac{5}{9})}a : \frac{6.(-1)-\tfrac{5}{9}.6}{6.\tfrac{5}{9}(-1-6)}b'$$

$$= \frac{1+\tfrac{5}{9}}{6-\tfrac{5}{9}}a : \frac{1+\tfrac{5}{9}}{\tfrac{5}{9}(1+6)}b' = \frac{9+5}{9.6-5}a : \frac{9+5}{5.7}b',$$

d. h. Fläche $o = \overline{|\tfrac{2}{7}a : \tfrac{2}{5}b' : c|}$.

Sektionslinie m fällt in Zonenpunkt $r'.v = (\tfrac{2}{61}a + \tfrac{9}{61}b')$ und $r.y$;

$$r = a' : \tfrac{1}{7}b,\ y = \tfrac{1}{8}a : \tfrac{1}{2}b, \text{ folglich}$$

$$m = 1,\ n = 7;\ m' = -8,\ n' = 2, \text{ und}$$

$$r.y = \frac{2-7}{1.2+8.7}a' + \frac{1+8}{1.2+8.7}b = \tfrac{5}{58}a + \tfrac{9}{58}b.$$

Für die Sektionslinie ist demnach

$$m = \tfrac{61}{2},\ n = \tfrac{61}{9};\ m' = \tfrac{58}{5},\ n = -\tfrac{58}{9}, \text{ folglich}$$

$$m = \frac{\tfrac{61}{9}.\tfrac{58}{5} + \tfrac{58}{9}.\tfrac{61}{2}}{\tfrac{61}{2}.\tfrac{58}{5}(\tfrac{61}{9}+\tfrac{58}{9})}a : \frac{\tfrac{61}{9}.\tfrac{58}{5} + \tfrac{58}{9}.\tfrac{61}{2}}{\tfrac{61}{9}.-\tfrac{58}{9}(\tfrac{58}{5}-\tfrac{61}{2})}b$$

$$= \frac{\tfrac{1}{9}.\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9}.\tfrac{1}{2}}{\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{5}(\tfrac{61}{9}+\tfrac{58}{9})}a : \frac{\tfrac{1}{9}.\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9}.\tfrac{1}{2}}{\tfrac{1}{9.9}(\tfrac{58}{5}-\tfrac{61}{2})}b'$$

$$= \frac{2+5}{61+58}a : \frac{(2+5)9}{58.2-61.5}b' = \tfrac{7}{119}a : \tfrac{63}{189}b',$$

d. h. Fläche $m = \overline{|\tfrac{1}{17}a : \tfrac{1}{3}b' : c|}$.

Endlich liegt σ im Kantenzonenpunkt $n.u = \frac{1}{10+5}a$, und in der Axe $\frac{1}{8}a$, daher Sektionslinie $\sigma = \frac{1}{8}a : \frac{1}{15+8}b$,

d. h. Fläche $\sigma = \overline{|\frac{1}{8}a : \frac{1}{23}b : c|}$.

Hiermit sind sämmtliche Flächen auf ihr neues Axenkreuz bezogen. Da nur eine Kantenzone vorhanden ist, so lassen sich die Ausdrücke nicht ohne einige Rechnung finden. Vergleichen wir aber die neue Projektionsfigur mit der des Feldspathes, des Augites (Fig. 20) und des Epidotes (Fig. 26), so sind jetzt in keinem Quadranten mehr dieselben Zonenpunkte, während bei den 2+1gliedrigen Systemen die zwei vordern und zwei hintern Quadranten gleiche Zonenpunkte hatten. Der Grund liegt in der Entwickelung der Flächen. Denn von den Flächen, welche der geschobenen Säule entsprechen sollten, ist nur eine einzige vorhanden, die zweite fehlt gänzlich; ebenso verhalten sich die augitartigen Paare, es entspricht z. B. der y, der x, der s auf der rechten Seite, keine analoge auf der linken, und umgekehrt der o, der c und der m auf der linken, keine analoge auf der rechten. Nur auf der Hinterseite entspricht der r zur rechten, ein analoges r' zur linken, r und r' wären also dem Ausdrucke nach ein augitartiges Paar, allein sie sind dennoch physikalisch different, so dafs in diesem Krystall die Symmetrie nach der linken und rechten, wie sie sich noch bei 2+1gliedrigen Systemen fand, gänzlich aufgehoben ist.

Kupfervitriol.

Ein ganz ähnliches System hat der Kupfervitriol (Tab. VII. Fig. 33 und 34). Gehen wir von den Oktaederflächen $Pnro$ aus, so liegt p in P/n und r/o, T in P/o und r/n, folglich sind beide, p und T, zugehörige Hexaidflächen. Würde sich Fläche s gehörig ausdehnen, so läge sie in Zone P/r

und in Zone p/T. Fläche v fällt in p/r und n/s; M fällt in P/v und n/r; die Fläche l (Fig. 34) würde in die Zonen o/s und r/n fallen; daraus bestimmt sich q in den Zonen P/l und r/o; i in M/q und s/P; w in r/q und i/n. Würden wir die Flächen auf die Axen a und b Fig. 34 beziehen, so ergäben sich folgende Ausdrücke:

$$n = |a : b : c|$$

$$r = |a : b' : c|$$

$$P = |b : a' : c|$$

$$o = |a' : b' : c|$$

$$T = |b : \infty a : \infty c|$$

$$p = |a : \infty b : \infty c|$$

$$s = |a : b' : \infty c|$$

$$v = |b' : \tfrac{1}{3}a : c|$$

$$l = |a : \tfrac{1}{3}b' : c|$$

$$M = |a : c : \infty b|$$

$$q = |b' : c : \infty a|$$

$$w = |b : 3a : c|$$

$$i = |2a : 2b' : c|$$

Diese Axenausdrücke sind jedoch ganz zufällig gewählt, wir könnten von ganz andern Oktaiden ausgehen, was wir jedoch dem Selbststudium überlassen.

Feldspäthe.

Periklin, Albit, Anorthit, Labrador.

Diese vier Minerale sind dem 2+1gliedrigen Feldspathe

(Orthoklas, Adular) sehr nahe verwandt, denn alle zeigen dieselbe typische Form. Allein die augitartigen Paare sind ganz verschwunden, es tritt entschieden zur Linken und Rechten eine Differenz ein. Diese Differenz spricht sich auch in den Axenwinkeln aus. Denn wenn beim Orthoklas (Tab. III. Fig. 1—5) die Axe *b* noch auf die Axenebene *ab*, d. h. auf die Krystallfläche *M*, welche dieser Axenebene parallel geht, senkrecht stand, so steht sie in diesen eingliedrigen Systemen schief darauf. Alle Flächen der Vertikalzone (*P*, *t*, *x*, *y*, *q*, Tab. VII Fig. 35 und 36), die der Axe *b* parallel gehen, stehen daher nicht mehr rechtwinklich, sondern schiefwinklich auf *M*, namentlich wird die gewöhnlich sichtbare rechtwinkliche Säule *P/M* jetzt schiefwinklich. Eine weitere Folge davon ist, dafs die Schiefendfläche *P* nicht mehr auf die Säulenkante *T/T'* grade aufgesetzt erscheint, d. h. die Kantenwinkel *P/T'* und *P/T* werden von einander verschieden. Ebenso stumpft *M* die scharfe Säulenkante *T/T'* so ab, dafs der Winkel *M/T* ein anderer ist, als *M/T'*. Um die Verhältnisse besser zu übersehen, stellen wir folgende Winkel in Fig. 35 Tab. VII zusammen:

Winkel	Adular	Periklin	Albit	Anorthit	Labrador
T/T'	118.52	120.37	122.15	120.30	?
P/T	112.16	111.28	110.51	110.57	115
P/T'	112.16	114.45	115.5	114.22	?
P/M	90°	86.41	86.24	85.48	85.30
M/T	120.32	120.18	119.52	117.28	119
M/T'	120.32	119.5	117.53	122.2	?

Die drei ersten Winkel im Adular sind die Winkel des Hendyoeders, an dem die zwei Endkanten (*P/T* und *P/T'*) noch gleich sind. Diese Endkanten werden in den übrigen dergestallt different, dafs der schärfere Endkantenwinkel (*P/T*) zur Rechten, der stumpfere (*P/T'*) zur Lin-

ken liegt. Diese Körper werden auch wohl *Henhenoeder* genannt (Hexaid). Drehen wir das Henhenoeder um, die untere Seite nach oben und die P wieder nach vorn, so wird jetzt umgekehrt die stumpfere Endkante (P/T') zur Rechten und die schärfere (P/T) zur Linken liegen. Mathematisch genommen, d. h. in Rücksicht auf ihre Kantenwinkel sind also alle Henhenoeder gleich, wenn wir nicht auf absolute Winkelgröfse, sondern nur auf die gegenseitige Gleichheit und Ungleichheit der Winkel sehen. Denn wenn die doppeltschiefe Endfläche P an dem einen Ende zur Rechten mit der Säulenfläche den stumpfern Winkel macht, so macht sie umgekehrt am andern Ende zur Linken die stumpfere, dasselbe gilt von den schärferen. Von rechts oder links geneigtem kann man also in diesem Sinne nicht sprechen.

Ganz anders aber werden die Betrachtungen, wenn wir zugleich mit auf die physikalischen Eigenschaften der Flächen Rücksicht nehmen. Die drei Krystallräume des Henhenoeders sind häufig verschieden blättrig. P erscheint bei allen als der Hauptblätterbruch, und von den beiden Säulenflächen T und T' ist stets nur eine deutlich blättrig, aber doch nicht so deutlich als die P, die andere fast gar nicht. Zwei sind also blättrig, die dritte nicht. Jetzt sind nun zwei Klafsen von Henhenoedern möglich, *entweder* liegt der stumpfere, *oder* der schärfere Endkantenwinkel zwischen den blättrigen Brüchen. Man ist dadurch ferner in den Stand gesetzt, dem Krystalle eine bestimmte Stellung zu geben (während sie oben immer zweideutig war). Denn wäre z. B. in Fig. 35 Fläche T der blättrige Bruch der Säule, und gäbe man folgende Bestimmung:

> *stelle die Säule T'/T aufrecht, den blättrigen Bruch T zur Rechten, und P nach vorn,*

so kann darunter nur eine einzige Stellung verstanden werden. Denn wollte ich jetzt den Krystall herumdrehen, und

P nach vorn kehren, so würde der blättrige Bruch *T* zur Linken liegen, was der Bestimmung nicht entspricht.

Nach dem, was man bis jetzt über die physikalische Beschaffenheit der Flächen weifs, gehören Periklin und Albit derjenigen Abtheilung an, wo der stumpfe Endkantenwinkel (114.45 und 115.5) zwischen den blättrigen Brüchen *P* und *T'* (Fig. 35.) liegt. Auch der Labrador scheint dahin zu gehören. Von ihm kennt man zwar nur den einen Endkantenwinkel von 115° (*P/T* auf der Tabelle), allein da die homologen Winkel sämmtlicher Henhenoeder sehr wenig von einander verschieden sind, so möchte man den Winkel für den stumpfern Endkantenwinkel anerkennen. Dieser Winkel liegt aber zwischen den Blätterbrüchen *P* und *T* (Fig. 35) (und nicht zwischen *P/T'*), also gehörte der Labrador ebenfalls hierher *). Ueber die Abtheilung des Anorthites kann man sich auch nicht mit Bestimmtheit entscheiden, da man bis jetzt nicht ermitteln konnte, welche von den beiden Säulenflächen am blättrigsten ist, in geringem Grade sind wohl beide blättrig. Um diese Verhältnisse alle gehörig einzusehen, mufs der Anfänger ein Hexaid (mit drei verschiedenen Säulenwinkeln) zur Hand nehmen, und die Flächen nach Anleitung der Figur 35. Tab. VII. bezeichnen.

---

*) Der Anfänger mag sich hier nicht verwirren. Wir haben bei Periklin und Albit *T'*, beim Labrador *T* blättrig genommen. Doch ist diefs gleichgültig. Für erstere ist die Säule *T'/T* aufrecht gedacht, *P* nach vorn gekehrt, und der blättrige Bruch *T'* (Fig. 35) zur Linken gelegen. Für den Labrador ist die Säule *T/T'* ebenfalls aufrecht gedacht und *P* nach vorn gekehrt, der blättrige Bruch aber auf die Rechte gelegt (*T* blättrig gedacht), der stumpfe Winkel liegt dann zwischen *P* und *T* auf der Rechten, während er bei jenen auf der Linken lag. Diefs macht aber durchaus keinen Unterschied; denn denke ich mir die Labrador Säule umgekehrt, das Unterende nach oben, und *P* nach vorn gekehrt, so wird der Blätterbruch *T* sammt dem von *T* und *P* eingeschlossenen stumpfen Winkel, ganz wie bei Periklin und Albit, zur Rechten liegen. Alles kommt also auf die Lage der blättrigen Brüche gegen den stumpfen Winkel an.

Weitere Unterschiede festzustellen, nehmen wir noch einen 4ten Krystallraum (*M*) hinzu, welcher die scharfe Säulenkante *T*/*T'* abstumpft, das Hexaid also in einen Vierzonenkörper verwandelt. *M* bildet mit jedem Krystallraum einen neuen Winkel, unter denen der Säulenwinkel *M*/*P* am wichtigsten ist; er kann am leichtesten von allen gemessen werden, denn *M* ist nächst *P* der deutlichste blättrige Bruch. Wie wir aus der Winkeltabelle ersehen, so ist die Säule nur beim Adular rechtwinklich, bei allen folgenden schiefwinklich, und natürlich so, daſs wenn der stumpfe Säulenwinkel *P*/*M* auf der einen Seite von *P* liegt, liegt der scharfe auf der andern. Mathematisch genommen kann man wieder nicht sagen, der stumpfe Winkel liege auf der Rechten oder Linken der Säule, weil beide Säulenenden in Beziehung auf Rechts und Links ein entgegengesetztes Verhalten haben. Allein wir sahen, daſs von den Endkanten des Henhenoeders bei einigen Feldspäthen diejenige ausgezeichnet war, welche *zwischen den blättrigen Brüchen* lag. Wenn aber diese bestimmt ist, so kann man darnach zwei Unterabtheilungen machen, *ob der scharfe* Winkel *P*/*M*, *oder der stumpfe* dieser Kante anliegt.

Beim Periklin und Albit liegt der *stumpfe* Winkel *P*/*M* der von den blättrigen Brüchen *P* und *T'* gebildeten Kante an. Denn am Krystall Fig. 35 ist *T'* blättrig, wenn Kante *P*/*M* rechts scharf ist, wie die Winkeltabelle zeigt, folglich muſs Kante *P*/*M* links stumpf sein. Dieses gegenseitige Verhältniſs kann sich aber nie ändern, denn kehre ich die Säule *T*/*T'* um, so liegt die Kante *P*/*T'* zur Rechten, allein eben so der stumpfe Winkel *P*/*M*, so daſs er gleichfalls der Kante *P*/*T'* anliegen muſs.

Beim Labrador liegt der *scharfe* Winkel *P*/*M* der von den blättrigen Brüchen *P* und *T* gebildeten Kante an. Denn vergleichen wir die Winkeltabelle, so ist *P*/*M* rechts scharf, *T* aber und nicht *T'* blättrig. Es leuchtet ferner ein, daſs wir bei dieser Eintheilung gar nicht auf die Gröſse

der Endkantenwinkel des Henhenoeders Rücksicht zu nehmen haben, sondern mag der von den Blätterbrüchen eingeschlossene Winkel der gröfsere oder der kleinere sein, dafs er von den *Blätterbrüchen gebildet wird,* zeichnet ihn hinlänglich aus, die Winkelgröfsen könnte man wieder als Unterabtheilungen nehmen. In diesem Sinne unterscheidet sich der Labrador bestimmt von den beiden ersten, obgleich über den Winkel von 115⁰ noch nicht entschieden werden kann, wenn nur *T* (Labrador) blättriger erscheint als *T'*, und diefs ist entschieden.

Aus dem Gesagten folgt weiter, dafs über den Anorthit nichts festgestellt werden kann, da wegen der Unbestimmtheit des blättrigen Säulenbruchs auch die Endkanten des Henhenoeders unbestimmt bleiben müssen.

Jetzt sind wir vollkommen in den Stand gesetzt, die Ausdrücke: *rechts* und *links geneigte Feldspäthe*, zu verstehen. Stellt man den Albit (oder Periklin) aufrecht, den blättrigen Bruch (*T'* Fig. 35) zur Linken, so ist rechts oben *P/M* der scharfe, links der stumpfe; die doppeltschiefe Endfläche *P* ist also zur Linken geneigt, d. h. wäre *T' T P* ein Hendyoeder mit gleichen Endkantenwinkeln, *P/T* = *P/T'*, so müfsten wir *P* zur Linken drehen, um das Henhenoeder des Albits zu bekommen, immer unter der Voraussetzung, dafs der Blätterbruch *T'* zur Linken liegt. Beim Labrador nahmen wir *T* blättrig an, und dann lag der scharfe Winkel *P/M* ebenfalls zur Rechten (Fig. 35). Um den Labrador mit Albit zu vergleichen, müssen wir den Blätterbruch *T* ebenfalls zur Linken stellen, d. h. den Krystall umdrehen, alsdann fällt aber auch der scharfe Winkel *P/M* zur Linken, und der stumpfe zur Rechten, der Krystall ist also nach der Rechten geneigt.

Der Ausdruck *rechts und links geneigt* ist beziehungsweise zu nehmen; denn was für das eine Ende rechts ist, ist für das andere links, und es hängt ganz von der Willkühr ab, welchen Krystall man *rechts* und welchen

man *links geneigt* nennen will. Nur der Unterschied ist vorhanden, dafs *wenn man die Krystalle des Albits und Labradors aufrecht stellt, die blättrigen Säulenbrüche auf ein und dieselbe Seite, so neigen sich die Schiefendflächen der einen zu der einen, der andern zu der andern Seite.*

Der Anorthit geht wegen Mangel des blättrigen Säulenbruchs in alle diese Unterschiede nicht ein. Doch gehen wir weiter zu den Winkeln, welche die M mit den Säulenflächen T und T macht, so treten auch hier Unterschiede hervor. In der Winkeltabelle haben wir die vier ersten Winkel, von denen wir bis jetzt sprachen, in sämmtlichen Feldspäthen so zusammengestellt, dafs, vergleichen wir Fig. 35, die scharfen Winkel P/M zur Rechten fallen, dann liegen, wie beim Periklin und Albit, am Anorthit der scharfe Endkantenwinkel P/T zur Rechten, der stumpfe P/T' zur Linken (beim Labrador scheint es umgekehrt zu sein, wenn anders der Winkel 115° der stumpfe ist; darnach zu urtheilen, würde man den Anorthit nicht an den Labrador anreihen). Dieses Gesetz setzt sich nun aber nicht auf die Säulenwinkel M/T und M/T' fort. Zwar wird in allen die scharfe Kante T/T' durch M unter schiefen Winkeln abgestumpft, allein bei Periklin und Albit ist M/T gröfser als M/T', beim Anorthit aber M/T' kleiner als M/T'.

Wollten wir aus diesen Erscheinungen weitere Schlüsse ziehen, so müfsten wir jetzt zur rechnenden Krystallographie übergehen. Hier würden wir die Systeme nicht auf dem bis jetzt verfolgten einseitigen Wege untersuchen, sondern wir würden wieder ganz allgemein vom Oktaide ausgehen, alle möglichen Winkelverhältnisse daran erschöpfend untersuchen, und sodann erst zur Anwendung schreiten. Zum Verständniss der Systematik gehört diefs nicht. Denn in diesem Buche brauchen wir nur zu wissen, ob die Winkel gleich oder ungleich unter einander sind. Wenn wir irgendwo von Winkelgröfsen sprachen, so geschah diefs

nur, um daraus die Gleichheit oder Ungleichheit der Winkel einzusehen.

Der Vollständigkeit wegen haben wir in Fig. 35 und 36. Tab. VII. einen Flächenzusammenhang gezeichnet. Die Figuren passen auf alle Feldspäthe, auf die 2 + 1gliedrigen wie auf die 1 + 1gliedrigen, wir dürfen daher nur wieder zum Beispiele Feldspath in der Zonenlehre zurück kehren, wo wir vom Oktaide $T\ T P x$ ausgingen; die Flächen n und n' in der Diagonalzone von P werden jetzt different, weil M/P rechts stumpf wird, wenn M/P links scharf ist; dasselbe gilt auch von o und o'. Ebenso mufs auch m', die Abstumpfungsfläche der Kante P/T', physikalisch von der rechts auftretenden verschieden sein, die aber im Krystalle Fig. 36 gesetzmäfsig gar nicht erscheint. Ebenso erscheint u hinten rechts, während sie hinten links gesetzmäfsig auch nicht vorhanden ist. Es ist also gar nicht nothwendig, nicht einmal Regel, dafs in den Flächen der einen Seite die analogen auf der andern vorhanden sind; erscheinen sie aber, so sind sie unter sich physikalisch different.

Bemerkungen zu den Zwillingen.

1. *Zwei Krystallindividuen befinden sich in einer Zwillingsstellung, wenn nicht alle, sondern nur einige homologe Krystallräume respektive parallel gehen, d. h. zusammenfallen.*

In der Zonenlehre sahen wir, dafs zwar zwei Krystallräume parallel gedacht werden können, sie bilden dann aber immer, der Definition gemäfs, einen einzigen Krystallraum, d. h. sie fallen in einen zusammen. Wählen wir zur Versinnlichung das einfachste Beispiel, die vierseitige Säule (z. B. die Arrogonitsäule Tab. IV. Fig. 33)! Sollen nun zwei solche Säulen in Verbindung treten, so können

entweder beide Krystallräume der Individuen respektive parallel gedacht werden (a parallel a' und b parallel b' Fig. 33), dann ist das eine Individuum die unmittelbare Fortsetzung des andern, beide enthalten nur zwei Krystallräume, welche gehörig ausgedehnt eine dritte Säule geben, die krystallographisch genommen in jeder Hinsicht den erstern beiden gleicht, man nennt daher auch, trotz der scheinbaren Trennung, das Ganze nur *ein* Individuum;

oder es kann ein Krystallraum der Individuen respektive parallel gehen (a parallel a' Fig. 37), der andere (b) des einen den andern (b') des andern beliebig schneiden, dann bekommen wir ein drittes Individuum mit drei Krystallräumen (dem gemeinsamen $a\,a\,a'\,a'$, dem $b\,b$ und $b'\,b'$). Dieses dritte Individuum ist ein Doppelindividuum, ein Zwilling, und da drei Krystallräume eine sechsseitige Säule oder ein Hexaid bilden, so kann der neue Körper eine

sechsseitige Säule oder ein Hexaid sein, je nachdem wir die Bedingungen stellen.

Was nun von Krystallen mit zwei Krystallräumen gilt, Aehnliches gilt auch von Krystallen mit mehreren, das Zwillingsindividuum, aus 12räumigen Krystallen bestehend, hat $(2n - n')$ Krystallräume, wenn den beiden einfachen Krystallen n' Krystallräume gemein sind.

Zusatz. Bei dieser Bestimmung ist von allen zufälligen Erscheinungen abgesehen, wir haben es nur mit ungetrennten Krystallräumen zu thun. In der Natur treten jedoch die Zwillinge in verschiedener besonderer Weise auf:

1) in *Juxtaposition,* zwei Individuen liegen nach dem Zwillingsgesetz mit irgend einer Fläche der parallelen Krystallräume an einander (haben eine Fläche gemein, die *gemeinsame Fläche* genannt), und zwar so, dafs man die Umrisse der beiden Individuen nach allen Richtungen hin verfolgen kann (z. B. die beiden Rhomboeder Fig. 46). Die Entzifferung solcher Krystalle ist einfach, denn man kann jedes Individuum nach seinem Zonenzusammenhange wieder erkennen, ja würde man beide durch einen Schnitt in der gemeinsamen Ebene trennen, so bekäme man zwei vollständige einzelne Krystalle.

2) In *Penetration,* wenn sich beide Individuen so durchdringen, dafs von den Umrissen der einzelnen nur so viel sichtbar bleibt, als der Zwillingsumriss erfordert. Diefs ist der am schwersten erkennbare Fall, denn alsdann erscheint das Zwillingsindividuum trügerisch wie ein einfacher Krystall, von der gemeinsamen Ebene ist nichts zu erkennen. Den einzelnen Individuen ist auch in der That keine Ebene gemein, weil, wenn die Durchdringung vollkommen sein soll, in jedem Punkte des Zwillingskrystalls sowohl Materie (oder doch die wirkende Kraft) von dem einen wie von dem andern Individuum gedacht werden mufs. In dieser ideellen Form mögen die Zwillinge wohl selten

auftreten, doch werden sie sich derselben bald mehr oder weniger nähern, und in jedem Falle wird die Form der beiden einzelnen Individuen im Zwillinge ganz unerkennbar bleiben. Am häufigsten erscheint

3) die *gemischte Form*, worin theilweise Juxtaposition und theilweise Penetration Statt findet. In diesem Falle kann man zum Theil die Umrifse der einzelnen Individuen noch erkennen, ein bedeutendes Stück des Zwillings gehört jedoch beiden Individuen zugleich an, es taucht auch das eine Individuum mit seinen Ecken aus den Flächen des andern hervor, bildet einspringende Winkel, und wollte man versuchen, beide Individuen durch eine Fläche zu trennen, so würde immer dem einen noch ein bedeutendes Stück von dem andern anhängen.

Für die theoretische Betrachtung sind jedoch alle diese 3 Fälle gleich, denn ein und dasselbe Mineral zeigt seine Zwillinge bald auf diese bald auf jene Art.

2. *Die gegenseitige Zwillingsstellung zweier Krystallindividuen ist mathematisch bestimmt, wenn die Krystallräume eines beliebigen Hexaides im einen mit den Krystallräumen eines beliebigen Hexaides im andern zusammenfallen.*

Wenn man von der Stellung eines Individuums im Raume spricht, so darf man bekanntlich nur ermitteln, wie das Individuum sich zu den drei Dimensionen des Raumes verhält. Das Hexaid bestimmt uns aber drei Raumdimensionen, und da jedes Hexaid (d. h. drei beliebige Krystallräume) mit den übrigen Flächen des Krystalls in einem Deduktionszusammenhange stehen mufs (wenn dieser Zusammenhang durch Zonen nicht nachweisbar ist, so läfst er sich doch durch Messungen ermitteln), so wird aus der Stellung des Hexaides auch die Stellung aller übrigen Flächen folgen. Da ferner die Krystallräume des bestimmenden Hexaides in beiden Individuen zusammen fallen, so wird man also auch wissen, wie alle Krystallflächen sich gegen

das gemeinsame Hexaid verhalten, folglich wissen, wie die Individuen des Zwillings gegen einander gestellt sind.

Um diesen Satz theilweis zur Anschauung zu bringen, darf man ihn nur auf das allgemeine Oktaid anwenden. Wollten wir z. B. die gegenseitige Stellung zweier solcher Oktaide ermitteln, so projiciren wir eines derselben, wie auf Tab. II. Fig. 18 geschehen. Denken wir uns nun vom zweiten Oktaide eine Reduktionsebene der $a \ldots a$, eine zweite der $b \ldots b$ parallel gelegt (die Sektionslinien derselben mögen $a' \ldots a'$, $b' \ldots b'$ heifsen), so sind durch diese Säule die Lagen der beiden übrigen Reduktionsebenen noch nicht bestimmt. Denn ich kann jetzt noch von den beiden andern Reduktionsebenen eine dritte $c' \ldots c'$, *entweder* der $c \ldots c$ parallel, *oder* so legen, dafs sie mit $b' \ldots b'$ den Winkel, welchen in Fig. 18 $c \ldots c$ mit $a \ldots a$, und dafs sie mit $a' \ldots a'$ den Winkel, welchen $c \ldots c$ mit $b \ldots b$, macht; hieraus bestimmt sich dann die Lage der vierten Reduktionsebene $d' \ldots d'$, so dafs die Projektionsfigur des 2ten Oktaides der des ersten nicht parallel steht. Die gegenseitige Stellung der beiden Oktaide, nachdem sie schon eine Säule gemein haben, bleibt also zweideutig. Bestimme ich hingegen die dritte Reduktionsebene $c' \ldots c'$ so, dafs sie der $c \ldots c$ parallel geht, dafs also beide Oktaide ein Hexaid gemein haben, so kann die vierte Reduktionsebene $d' \ldots d'$ nur eine einzige Lage, d. h. dieselbe, welche $d \ldots d$ hat, haben. Wenn aber das Oktaid seiner Lage nach durch das Hexaid bestimmt ist, so müssen auch alle Flächen bestimmt sein, welche aus dem Oktaide durch Deduktion folgen.

Zusatz. In der Regel wird das die Lage der Zwillinge bestimmende Hexaid aus drei möglicher Weise durch Deduktion zu folgernden Krystallräumen bestehen. Allein wenn dieses fehlen sollte, so ist klar, dafs zuletzt jedes beliebige Hexaid zur Bestimmung hinreicht. Daher ist es nicht allgemeiner Gebrauch, sich obiger Bestimmungsmethode zu bedienen, sondern man nimmt *Drehung um eine*

Axe zu Hilfe. Zu dem Ende bringt man die beiden Krystallindividuen in parallele Stellung, legt sie in dieser parallelen Stellung mit der beiden Individuen gemeinsamen Fläche an einander, und dreht das eine Individuum um das andere. Die Linie, um welche das Individuum gedreht wird, heifst *Zwillingsaxe,* die auf die Zwillingsebene senkrecht steht. Häufig sagt man auch, die Individuen haben eine Fläche gemein und liegen gegen diese umgekehrt, das eine zur Rechten, das andere zur Linken. Diefs ist die naturgemäfseste Bezeichnung.

3. *Das einzige Zwillingsgesetz des regulären Systems ist, dafs zwei Oktaeder eine Fläche gemein haben, und gegen diese, die Zwillingsebene, umgekehrt liegen, d. h. die andern drei nicht gemeinsamen Flächen schneiden die Zwillingsebene respektive unter gleichen Winkeln, nur liegen die einen zur Rechten, die andern zur Linken der Zwillingsebene.*

In Tab. IV. Fig. 36 sind zwei nach der aufrechten Richtung verkürzte Oktaeder ($\alpha \beta \gamma \delta$ und $\alpha \beta' \gamma' \delta'$), das eine nach oben, das andere nach unten. Die Flächen bilden dann an der Zwillingsebene (α) abwechselnd ausspringende und einspringende Winkel. Zugleich sieht man, dafs drei auf einander folgende Krystallflächen ($\beta \gamma \delta$ und $\beta' \gamma' \delta'$) in beiden Individuen zur gemeinsamen Zwillingsebene (α) gleiche Neigung haben. Dafs die Oktaeder verkürzt sind, daran darf man keinen Anstofs nehmen, denn man sieht bald ein, dafs die Flächen $\alpha \beta \gamma \delta$ sechs Zonen ($\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$) mit einander machen, folglich ein Oktaeder bilden, ebenso $\alpha \beta' \gamma' \delta'$. Um nun eine Einsicht zu bekommen, welche Krystallräume in beiden Individuen zusammen fallen mögen, darf man sie nur auf die Zwillingsebene projiciren (Tab. I. Fig. D). Die Flächen $\beta \gamma \delta$ bekommen ein gleichseitiges Dreieck zur Projektionsfigur; ebenso die Flächen $\beta' \gamma' \delta'$ des zweiten Oktaeders. Schon eine allgemeine Betrachtung zeigt uns, dafs das Dreieck $\beta' \gamma' \delta'$ gegen Dreieck $\beta \gamma \delta$ nicht

gut anders gestellt sein würde, als es in Fig. D geschehen, worin die Sektionslinien β und β', γ und γ', δ und δ' respektive einander parallel gehen. Würde man das eine Dreieck 60° um den beiden gemeinsamen Mittelpunkt drehen, so würden beide Dreiecke (folglich auch die zugehörigen Flächen) sich mit ihren Seiten decken, folglich sagt man, der Zwilling sei durch Drehung von 60° um die Zwillingsaxe c entstanden (man kann auch sagen 3.60 oder 5.60, während die Dreiecke bei Drehung von 2.60, 4.60 und 6.60 sich decken). Das Zwillingsgesetz gehörig studiren zu können, mufs sich der Anfänger zwei gleiche reguläre Otaeder verschaffen. Legt er diese Oktaeder mit einer Seite so an einander, dafs sich die auf einander liegenden Dreiecke decken (Ecke auf Ecke, Kante auf Kante fällt), so haben beide Oktaeder im wahrhaften Sinne des Wortes *eine Fläche gemein,* die Individuen befinden sich also auch in Zwillingsstellung. Nennen wir die Ecken des gemeinsamen Dreiecks abc im einen, $a'b'c'$ im andern Individuum, so kann man Ecke a' auf a, b oder c legen, es sind also drei Stellungen möglich, wo jede einen Zwilling gibt. Schauen wir bei diesen Stellungen auf die übrigen nicht gemeinsamen Krystallräume, so schneiden sie sich abwechselnd unter ein- und ausspringenden Winkeln, daher müssen bei der Projektion (Tab. I. Fig. D), wo alle durch *einen* Punkt gelegt sind, die beiden neu entstehenden Dreiecke ($\beta\gamma\delta$ und $\beta'\gamma'\delta'$) sich symmetrisch kreuzen. Eine solche Bestimmung beruft sich nicht auf Drehung und andern entfernt liegende Bestimmungen, sondern sie bleibt unmittelbar bei der Sache, gibt daher dem Betrachter die vollste und gründlichste Anschauung. Dasselbe gilt nun auch für alle übrigen Oktaeder.

Nachdem die Zwillingsstellung der Individuen bestimmt ermittelt, ist es nun sehr leicht, sämmtliche Flächen zu finden, welche beiden Individuen möglicher Weise gemein sein können. Wir dürfen nur aus jedem einzelnen Oktae-

der in dieser Stellung die zugehörigen Flächen deduciren, und sehen, ob die Sektionslinien in dem einen Oktaeder mit denen im andern zusammen fallen.

Zunächst sind beiden drei Granatoederflächen (d) gemein, denn dieselben sind zu beiden Dreiecken gleich symmetrisch gelegen. Ebenso drei Leucitoederflächen l. Auch 6 Flächen λ, welche je zwei Ecken der Projektionsdreiecke verbinden, bilden an jedem Oktaeder Sektionslinien gleicher Deduktionsflächen. Denn nimmt man die l als die Axen (a) beider Oktaeder an, und setzt die aufrechte Zwillingsaxe c, so erhalten die Sektionslinien der Oktaeder das allgemeine Zeichen

$$\overline{|a:a:\infty a:c|};$$

die Flächen λ aber auf dieselben Axen bezogen

$$\overline{|3a:\tfrac{3}{2}a:3a:c|}.$$

Die Flächen λ schärfen also die Endkanten des Rhomboeder bcd und $b'c'd'$ in gleicher Weise zu, sie sind für das eine Rhomboeder dasselbe, was sie für das andere sind. Aehnliches gilt für alle Flächen, deren Sektionslinie den Sektionslinien λ parallel gehen, weil diese alle zu beiden Dreiecken dieselbe Symmetrie haben.

Um nun diese Flächen auf die rechtwinklichen Axen eines Oktaeders beziehen zu können, projiciren wir uns das Oktaeder $\alpha\beta\gamma\delta$ auf seine Hexaidfläche, wie Tab. I. Fig. A geschehen. Die Lage des zweiten Oktaeders $\alpha\beta'\gamma'\delta'$ dagegen zu ermitteln, nehmen wir Fig. D zu Hilfe. Zuerst müssen beide die Sektionslinie α gemein haben; die Lage der drei andern Sektionslinien zu finden, nehmen wir zwei Flächen d zu Hilfe. Die drei Granatoederflächen d (Fig. D) gehören einer sechsseitigen Säule an, und stumpfen die Kanten β/γ, β/δ und γ/δ ab; ziehen wir sie in Fig. A, so folgt daraus durch Deduktion die Lage der drei l, denn diese liegen in der sechsseitigen Säule d/d, und zugleich in den drei Zonen β/d, γ/d und δ/d. Nun liegt aber β' in α/β und l/δ, δ' in

α/δ und l/β, γ' in d/β' und d/δ', folglich ist die Lage des zweiten Oktaeders zur ersten für die Stellung (Fig. A.) ermittelt, und zwar folgt sie aus 2 Granatoederflächen ($d\,d$) und der Oktaederfläche α, also aus einem beiden gemeinsamen Hexaide. Zeichnen wir uns in diese neue Projektionsfigur die drei zu $\alpha\,\beta'\,\gamma'\,\delta'$ zugehörigen Hexaidflächen (h'), so fallen die drei Granatoederflächen in deren Kantenzonen, die Granatoederflächen sind also nicht blos dem ersten, sondern auch dem andern Oktaeder zugehörig. Dasselbe läfst sich nun auch mit Leichtigkeit von den Flächen l nachweisen. Fassen wir z. B.

$$l = |\,c:2a:2a\,|$$

ins Auge, so liegt sie in der Kantenzone des zugehörigen Granatoeders, und in den Zonen δ/β', δ'/β, h/α und h'/α, also in Zonen, welche durch gleichnamige Flächen beider Oktaeder gebildet sind. Daraus folgt schon, dafs sie sowohl im einen, wie im andern zugehörige Leucitoederfläche sein mufs.

Die sechs Flächen λ (Fig. D) darf ich jetzt nur in Fig. A in die analogen Zonenpunkte einziehen, so leuchtet ein, dafs sie Leucitoidflächen

$$\lambda = |\,a:\tfrac{1}{3}a:a\,|$$

sein müssen.

Was Fig. D zeigt, dafs alle Flächen, die in einer Zone λ/α liegen, in beiden Oktaedern gleichwerthige Flächen sind, das zeigt jetzt auch Fig. A. Hier haben nemlich die drei Zonenpunkte $\lambda\,d\,\lambda\,\alpha$, $\lambda\,d\,\lambda\,\alpha$ und $\lambda\,d\,\lambda\,\alpha$, welche in der Sektionslinie α liegen, die bemerkenswerthe Eigenschaft, dafs alle durch dieselben gelegten Sektionslinien in beiden Oktaedern denselben Körpern angehören, es sind also zusammenfallende Krystallflächen. Ziehen wir z. B. die beiden Flächen π, so fallen diese ausser den Punkten λ/α noch in die Zone h'/h' und h/h, wovon die erstere die Kante des zugehörigen Würfels vom Oktaeder $\alpha\,\beta'\,\gamma'\,\delta'$, die letztere

die Kante des zugehörigen Würfels vom Oktaeder $\alpha\beta\gamma\delta$ bezeichnet. Fläche π ist also die Pyramidenwürfelfläche $\overline{|a:\frac{1}{2}a:\infty a|}$ für beide Oktaeder. Um nun zu sehen, welche Flächen möglicher Weise in beiden Oktaedern zusammen fallen können, dürfen wir nur auf dieselben drei Zonenpunkte in Tab. I. einen Blick werfen. Hier sehen wir noch $2.3 = 6g$ und $4.3 = 12\gamma$ in den Punkten liegen, 48flächnern angehörig, deren Flächen also auch theilweis beiden Oktaedern angehören müssen.

Flächen, die nicht in diesen drei Punkten liegen, bekommen in den verschiedenen Oktaedern verschiedenen Werth, wie z. B. die Würfelflächen h und h'. Ja selbst die zusammenfallenden Granatoederflächen (d) liegen in diesen Punkten, nur die drei Leucitoederflächen l nicht, deren Sektionslinien in Fig. D die Axen a bestimmen. Sie machen die einzige Ausnahme, da sie gerade die Zonenpunkte von den 6 Sektionslinien ($\beta\gamma\delta$ und $\beta'\delta'\gamma'$) beider Oktaeder verbinden.

Wenn nun zwei Individuen nach dem aufgeführten Zwillingsgesetz in Verbindung treten, so könnten sie zwar möglicher Weise mit jeder Gränzfläche der zusammenfallenden Krystallräume sich an einander legen, Regel ist es jedoch, dafs die gemeinsame Oktaederfläche die Zwillingsebene bleibt, ausgenommen, wenn die Individuen durcheinander wachsen, weil dann von einer bestimmten gemeinsamen Fläche nicht mehr die Rede sein kann.

Stellen sich zwei *Würfel* nach dem Zwillingsgesetz an einander, so durchwachsen sie sich gewöhnlich (Tab. IV. Fig. 39), doch können sie auch an einander wachsen (Fig. 38). In Fig. 38 sind nemlich beide Individuen nach einer rhomboederischen Axe (c) aufrecht gestellt. Die Gradendfläche dieser Axe ist die gemeinsame α, die durch ein kleines Dreieck angedeutet ist. Beide Würfel sind aber so gegen einander verdreht, dafs der obere seine Fläche hinwendet, wo der untere seine Kante hat, wie diefs auch

aus der Projektion folgt. Würden sich beide genau durchdringen, und die vorspringenden Kanten und Ecken wegfallen, so bekämen wir ein genaues Dihexaeder (Tab. I. Fig. D. $aaa\ldots$). Diefs ist jedoch selten der Fall, die Würfel durchdringen sich vielmehr nur unter den beliebigsten Ausdehnungen der einzelnen Flächen (Fig. 39), wodurch dann die Ecke des einen über der Fläche des andern und umgekehrt hervorsteht. Aus Fig. A (Tab. I.) kann man leicht sehen, wie die Ecken hervorstehen müssen. Betrachten wir nemlich die Kanten des einen (h) als Axen, so schneiden die Flächen (h') des andern diese Kanten in dem Verhältnifs 1:1:2, denn h' ist ja $= \lvert a:a:2a \rvert$. Daher müssen von den drei Kanten der auf h hervorspringenden Ecke vom Würfel h zwei unter sich gleich sein, aber halb so lang als die dritte. Diefs ist ein treffliches Kennzeichen für Würfelzwillinge.

Nicht selten gesellen sich zu den Würfeln noch untergeordnete Flächen, doch lassen sich deren Verhältnisse leicht aus der Projektion ermitteln. Fänden sich z. B. am Würfelzwillinge (Fig. 38 und 39) noch die Flächen des Pyramidenwürfels $\lvert a:\tfrac{1}{2}a:\infty a \rvert$, so würden, wie sich aus Fig. A ergibt, die Hälfte derselben zu zwei in ein Niveau fallen müssen. Es ist diejenige Hälfte, welche die Endkanten zuschärft, so dafs also ein und dieselbe Fläche, wenn sie die Endkante des einen Würfels zuschärft, gehörig ausgedehnt auch eine Endkante des andern Würfels in derselben Weise zuschärfen mufs.

Flufsspath, Bleiglanz und Schwefelkies liefern die deutlichsten Beispiele für Würfelzwillinge, auch bei Gold, Silber und Kupfer fehlen sie nicht.

Verwachsen zwei Oktaeder zu einem Zwillinge, so ist die Aneinanderwachsung (Tab. IV. Fig. 36) am häufigsten, doch kommen auch Durcheinanderwachsungen (Fig. 40) vor. Eine Fläche (α und α') mufs dann aus beiden Individuen

genau einspiegeln, es ist dieses die gemeinsame, worauf wir in Fig. D den Zwilling projicirt haben, daher müssen sich die gleichseitigen Dreiecke dieser gemeinsamen Fläche (Tab. IV. Fig. 40, α und α') unter denselben Verhältnissen kreuzen, wie die beiden gleichseitigen Dreiecke $\beta\gamma\delta$ und $\beta'\gamma'\delta'$ in Fig. D. Tab. I. Aus den übrigen nicht gemeinsamen Flächen beider Individuen treten wechselseitig die vierkantigen Oktaederecken hervor. Die Ecken werden von den Flächen so geschnitten, dafs 2 der α zugekehrten Kanten gleich und kürzer, zwei der α abgewendeten gleich und länger sind. Ein solcher Schnitt folgt aus Fig. A. Sie zeigt nemlich, dafs wenn wir die Axen des einen Oktaeders ($\alpha\beta\gamma\delta$) dem Zwillingssysteme zu Grunde legen, von den Flächen des andern Oktaeders die gemeinsame α auf die Axen des ersten Oktaeders ($\overline{|a:a:a|}$) bezogen, denselben Ausdruck $\overline{|a:a:a|}$ erhält, daher müssen die α und α' einspiegeln. Die drei andern Flächen $\beta'\gamma'\delta'$ erhalten die gleichen Ausdrücke $\overline{|a:a:\tfrac{1}{5}a|}$, sie sind also an dem ersten Oktaeder Leucitoidflächen. Da nun Leucitoidflächen, an einem Oktaeder untergeordnet gedacht, die Oktaederflächen in obiger Weise schneiden, so ist dadurch das Zwillingsverhältnifs ergründet.

Magneteisen, Spinell, Alaun, Blende, auch wohl Silber und Kupfer, sind die geeignetsten Beispiele für diese Zwillinge.

Das Tetraeder ist seltner diesem Zwillingsgesetz unterworfen, doch kommt beim Fahlerz eine Durchwachsung vor. Der Zwilling läfst sich leicht aus dem Oktaeder entwickeln. Denn das Tetraeder an sich kann man als einen Körper ansehen, der von den vier Reduktionsebenen (A. §. 7) des Oktaeders eingeschlossen ist. In Fig. D werden daher die Sektionslinien $\beta\gamma\delta$ und $\beta'\gamma'\delta'$ die Verhältnisse darstellen. Die Tetraeder haben den Punkt x und die Pro-

jektionsebene (α) gemein, und sind um 60° gegen einander verdreht, was Fig. 41. Tab. IV. darstellt. Zwei Granatoeder in Zwillingsstellung wachsen gern mit der gemeinsamen Oktaederfläche aneinander. Da aber die 4 Oktaederflächen an den 4 sechsseitigen Säulen des Granatoeders die Gradendflächen bilden, so wird die gemeinsame Oktaederfläche an einer sechsseitigen Säule die Gradendfläche sein, und diese Säule stellen wir aufrecht. Wie aus Fig. D einleuchtet, so ist grade diese aufrechte Säule diejenige, welche beiden Individuen gemein ist, daher fallen diese Säulenflächen beider in ein Niveau, die übrigen aber, welche in der Säule eine rhomboedrische Zuschärfung bilden, liegen so, daſs das eine Individuum seine Kanten hat, wo das andere seine Flächen hat. Durchwachsen sich daher zwei solche Individuen, wie das beim Sodalit in so ausgezeichneter Regelmäſsigkeit vorkommt, so tauchen an dem Ende der gemeinschaftlichen Säule über den Flächen des einen Individuums die Kanten des andern hervor, und umgekehrt, wie wir an Fig. 42 sehen, wo die Endkanten d/d und d'/d' hervorstehen und den Endkanten der beiden Granatoeder d und d' entsprechen, die Kanten d/d' aber vertieft liegen, da sie diejenigen sind, unter welchen sich beide Individuen begegnen.

Aus dieser Figur sehen wir dann näher ein, daſs mit den Säulenflächen der Granatoeder zugleich sämmtliche Flächen der 48flächner einspiegeln müssen, welche die Säulenkanten zuschärfen, also 6 Flächen. Weitere 6 Flächen liegen am Ende in den Kanten d/d und d'/d'; denn da Kante d/d' in einer Vertiefung liegt, die Granatoederkanten sich aber gleichmäſsig erheben, so werden beide Kanten d/d und d'/d' durch ein und dieselbe Fläche in gleicher Weise zugeschärft werden. Beiden Individuen sind also 12 Flächen des 48flächner gemein, wie auch die drei Punkte ($\lambda . \alpha$) der Projektionsfigur Tab. I. Fig. A. zeigen. Wenn die beiden Zwillingsindividuen nicht durch einan-

der wachsen, so legen sie sich nur mit der Gradendfläche der gemeinsamen sechsseitigen Säule an einander, so dafs der obern Hälfte der Säule das eine Individuum, der untern das andere angehört, und beide Individuen sind dann nach der Säulenaxe bedeutend verkürzt, so dafs die Säulenflächen oft ganz verschwinden, wie diefs z. B. beim Diamant der Fall ist, wo anstatt der Granatoeder Pyramidengranatoeder sich finden. Wie die Oktaeder, so erscheinen auch hier beide Individuen gegen einander um 60° verdreht, und eine Folge davon ist, dafs die obern drei Endflächen der sechsseitigen Säule abwechselnd auf dieselben Kanten aufgesetzt sind, auf welche die der untern aufgesetzt sind, daher gehen die untern Endflächen den obern nicht mehr respektive parallel, wie das im einfachen Granatoeder der Fall ist.

Würden die beiden Granatoeder eine Säulenfläche gemein haben, so würde das Ende des einen seine Kanten hinwenden, wo das des andern seine Flächen hinkehrt; alles wird aus Fig. 42 klar, wenn man das Individuum d aus dem d' parallel mit sich herausgehen läfst, bei welcher Bewegung es dann ganz gleichgültig wird, mit welcher Fläche die Individuen sich aneinander legen.

Beim Silber, Golde und Kupfer, die in Hinsicht auf ihre Krystallisationen so verwandt sind, findet sich oftmals das einfache Leucitoid $\overline{|a : a : \frac{1}{3}a|}$ in Zwillingsstellung. 6 Flächen, und zwar diejenigen, welche die versteckten Kanten der drei nicht gemeinsamen Oktaederflächen zuschärfen, sind beiden gemein, von den übrigen 6 machen nur drei sehr wenig einspringende Winkel, so dafs man den Zwilling leicht übersehen kann.

Bei den hemiedrischen Körpern des regulären Systems kommt noch eine andere Art von Zwillingsverwachsungen vor: es durchkreuzen sich zwei Pyritoeder oder Tetraeder so, dafs dadurch wieder der vollflächige Pyramiden-

würfel oder das vollflächige Oktaeder entstehen würde, wenn die Ecken der einzelnen Individuen nicht aus den Flächen hervorsprängen. Es gibt sich darin ein Bestreben der hemiedrischen Körper kund, zu ihrer vollflächigen Gestalt zurückzukehren. Da in diesem Falle alle im Systeme auftretenden Flächen, wie im vollflächigen Systeme, mit einander beziehungsweise parallel gehen, die Projektionsfigur eines solchen Zwillings sich also gar nicht von der eines vollflächigen Individuums unterscheidet, so müssen diese einer ganz andern Klasse zugezählt werden, die in der Systematik gleich mit abgehandelt wurde.

Zusatz 1. Durch die Zwillingsverwachsung wird in den Körpern des regulären Systemes die 6gliedrige Stellung hervorgehoben, das System dem 3 und 6gliedrigen Systeme genähert, wie sich namentlich auch noch aus der Betrachtung der Krystallräume ergibt. Das reguläre Oktaeder enthält 4 gleiche Krystallräume, das 3gliedrige aber 3+1. Wenn sich nun zwei Oktaeder mit einem Krystallraume aneinander legen, so ist in gewisser Beziehung dieser gemeinsame Krystallraum von den übrigen dreien physikalisch different geworden, die 4 Krystallräume haben sich in 3+1 gespalten, d. h. das reguläre Oktaeder hat sich dem 3gliedrigen genähert. Im 3gliedrigen und sechsgliedrigen Systeme finden wir daher ganz dasselbe Zwillingsgesetz wieder vor.

Zusatz 2. Wer die Erscheinungen des Zwillingsgesetzes für zwei Individuen gehörig durchschaut hat, wird nun auch leicht dasselbe Gesetz auf mehrere übertragen. Es kommt häufig vor, dafs noch ein drittes Individuum sich hinzugesellt; dieses legt sich in der Regel an den gemeinsamen Krystallraum (α der Individuen 1 und 2) so an, dafs wenn es an das Individuum 1 gränzt es mit demselben in Zwillingsstellung verwächst, wovon dann weiter die einfache Folge wird, dafs dieses Individuum 3 mit Individuum 2 parallel steht, und umgekehrt steht 3 mit 1

parallel, wenn es dem gemeinsamen α von 2 in Zwillingsstellung anwächst. In beiden Fällen liegt zwischen den beiden parallel stehenden das dritte mitten inne. Oft schrumpft dieses dritte Individuum, gedrängt von den äussern, zu einer dünnen Lamelle zusammen, so dafs der Zwilling wie ein einfacher Krystall erscheint, zwischen dem nur eine dünne, zuweilen sich nur durch eine Linie verrathende, Lamelle befindlich ist. Was für 3 Individuen, gilt zuletzt auch für eine ganze Reihe von $n+1$ Individuen, worin das erste, 3te, 5te... und $n+1$te, und das 2te, 4te, 6te... und $2n$te einander parallel stehen. Man kann die ganze Reihe als einen einfachen Zwilling ansehen, worin sich die Individuen nur wechselseitig verdrängen.

Zusatz 3. Obgleich meistens die Zwillingsindividuen nur *einem* Krystallraume sich parallel stellen, so kommt es doch vor, dafs sie auch in gleicher Weise einem zweiten folgen, man darf sie dann nur in Fig. A. Tab. I. eintragen. Denn es ist offenbar, dafs ein drittes Individuum, welches mit $\alpha\beta\gamma\delta$ die β gemein hat, die Axen zur Rechten hin grade so schneiden würde, als das $\alpha\beta'\gamma'\delta'$ die Axen nach hinten hin schneidet. Die ganze Figur wäre erst geschlossen, wenn sich noch zwei Individuen an γ und δ legten. Dann hätten wir 5 Oktaeder, von denen das mittlere der Träger der vier äusseren wäre. Von diesen vieren würden je drei Krystallräume die Axen des mittlern in $\boxed{a : a : \frac{1}{3}a}$ schneiden, die $3 . 4 = 12$ Krystallräume würden daher einem vollständigen Leucitoide angehören, das untergeordnet an den Ecken des mittlern Oktaeder auftreten würde, wenn alle vorspringenden Kanten und Ecken der Zwillingsindividuen verschwänden. Der Körper wäre also vollflächig in jeder Beziehung. Der Zwilling setzt eine *Tetartoedrie* (Viertelflächigkeit) ein, die durch die übrigen 3 hinzutretenden Individuen wieder aufgehoben ist.

Zusatz 4. Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen

noch die reihenartig an einander gruppirten Krystalle, die beim Kupfer, Silber und Golde so häufig erscheinen, daſs sie Werner unter seinen besondern Gestalten mit dem Namen *gestrickt* und *dendritisch* belegte. Stellen wir uns ein Granatoeder nach einer seiner sechsseitigen Säulen (Tab. I. Fig. C) aufrecht, so lassen sich den drei Krystallräumen der Säule drei Reihen Granatoeder parallel stellen, die einen sechsseitigen Stern bilden. Daſs alle Individuen einander parallel stehen, sieht man aus den rhomboedrischen Endigungsflächen, deren homologe Kanten ebenfalls alle unter einander parallel liegen. Wie sich in unserer Figur an das mittlere Individuum sämmtliche einzelne Krystalle gesetzmäſsig anlagern, so kann abermals irgend eines der Individuen sich zum Mittelpunkte ausbilden, von dem ähnliche Reihen ausstrahlen, so daſs dasselbe Gesetz, ins Unbestimmte fortgesetzt, eine groſse Mannigfaltigkeit von Formen erzeugt. Immer werden aber die drei Richtungen, durch die drei Reihen von Individuen eingesetzt, sich unter denselben Winkeln (120° und 60°) schneiden, wodurch der Stern dem 6gliedrigen Systeme überaus ähnlich wird. Vom Zwillingsgesetz ist hier noch keine Andeutung vorhanden; sollte eine Zwillingsstellung Statt finden, so dürften die rhomboedrischen Endkanten nicht alle parallel laufen, sondern von zwei in Zwillingsstellung befindlichen Individuen müſste das eine seine Kanten hinkehren, wo das andere seine Flächen hat. Daher ist das Ganze vielmehr als ein groſser Krystall zu betrachten, dessen Flächen oscillatorisch hervortreten, um den Krystall zu schlieſsen.

Schauen wir auf die Unterseite dieser Figur, so finden sich sämmtliche rhomboedrischen Endflächen und Endkanten nach derselben Richtung hingekehrt, daher muſs dieser Untertheil sich gegen den Obertheil in Zwillingsstellung befinden. Denn wäre das nicht, so müſste, wie beim einfachen Granatoeder, die obere Endigung ihre

Kanten hinkehren, wo die untere ihre Flächen hinkehrt, es wäre also auf ein und dieselbe Säulenkante oben eine Fläche und unten eine Kante aufgesetzt, oder umgekehrt, während in unserer Figur C, wie im einfachsten Granatoederzwillinge, auf ein und dieselbe Säulenkante oben und unten eine Fläche oder Kante aufgesetzt erscheint. Die Zwillingsebene aller dieser an einander gereihten Individuen ist die Gradendfläche der Säule, welche die rhomboedrischen Endecken abstumpfen würde, also eine Oktaederfläche ist.

Denken wir uns anstatt dieser Granatoeder die zugehörigen Oktaeder oder Würfel, so wird dadurch die Reihenstellung der Individuen keine andere werden, die Umrisse der grofsen Figur können sich also im Allgemeinen nicht ändern. Prof. G. Rose (mineralogisch-geognostische Reise nach dem Ural, dem Altai und dem kaspischen Meere, Tab. IV.) hat zuerst beim Kupfer nachgewiesen, dafs die Zwillingsformen des Würfels wirklich in dieser Weise mit einander verwachsen, ebenso das Silber. Zugleich wird man beim Anblick unserer Figur unwillkührlich an die Formen der Schneesterne erinnert, in denen ebenfalls alle parallelen Systeme von Linien sich unter Winkeln von 120° und 60° schneiden, wie die unbefangenen Zeichnungen von Scoresby schon beweisen. G. Rose meint daher, dafs auch die Schneesterne dem regulären Systeme anheim fallen müssen, obgleich die Lichtverhältnisse des Eises ein 6gliedriges oder 3gliedriges System zu verlangen scheinen. Das Wasser wäre dann dimorph. Nur mufs man hier bedenken, dafs dasselbe Zwillingsgesetz sich auch im 3 und 6gliedrigen Systeme vorfindet, dafs also durch Körper dieser Systeme dieselbe Erscheinung hervorgerufen werden kann. Man vergleiche hier auch die Streifungen im Meteoreisen (Widmanstedtischen Figuren), die Streifungen, die auf dem Eise, sechsgliedrigen Krystallen etc. zum Vorschein kommen.

4. *Das hauptsächlichste Zwillingsgesetz des 3gliedrigen Systems ist: Zwei dreigliedrige Oktaeder haben ihre ungleiche Fläche mit einander gemein, und liegen umgekehrt gegen diese Zwillingsebene.*

Es ist diefs wörtlich dasselbe Gesetz, wie im regulären System, daher können wir dieselben Figuren zur Veranschaulichung gebrauchen, namentlich haben die Krystalle auch dieselben homologen Flächen mit einander gemein (Tab. IV. Fig. 36. Tab. VI. Fig. 1.), nur müssen wir dabei immer an die bekannten Winkeldifferenzen denken. Ja, was noch mehr, wir haben oben schon, bei der Darstellung der 3 und 6gliedrigen Systeme, auseinander gesetzt, dafs man das sechsgliedrige System als den Zwilling des dreigliedrigen möglicher Weise ansehen könnte. Demnach bleibt uns hier nicht viel mehr übrig, als wiederholentlich Einiges über die besondere Erscheinungsweise des Gesetzes hinzuzufügen.

Auch hier wird der Anfänger das Gesetz am leichtesten durchschauen lernen, wenn er sich zwei kongruente dreigliedrige Oktaeder verschafft. Nach Anleitung des A. §. 41 erhält er diese am leichtesten, sobald er sich zwei kongruente Rhomboeder verfertigt und die dreikantigen Endecken durch Flächen abstumpft, welche durch 3 Seitenecken gehen. Da diese Gradendfläche, ein gleichseitiges Dreieck, zur Zwillingsebene wird, so darf ich nur die Dreiecke mit Kanten und Ecken auf einander legen, um den Zwilling zu bekommen. Wie im regulären Systeme sind auch hier drei Stellungen (Drehungen!) möglich, welche alle drei denselben Zwilling liefern.

Dehnen sich die drei gleichen Krystallräume zu einem selbstständigen Rhomboeder aus (Fig. 38. Tab. IV.), so werden die Flächen im obern Individuum (h) wie die Kanten im untern (h') liegen. Dafs sich diese Rhomboeder grade mit der Gradendfläche aufeinander stellen, ist mehr oder weniger zufällig, sie legen sich häufig auch mit der

Säulenfläche neben einander, durch welche die Seitenkanten der Rhomboeder abgestumpft werden, wie man schon aus Fig. 38 sieht, wo die Seitenkanten der Rhomboeder bei gehöriger Durchdringung sich kreuzen würden. Die verschiedenen Kalk- und Bitterspäthe, Zinnober und Chabasit liefern hiezu Beispiele. Letztere kommen auch sehr gerne in Durchkreuzungszwillingen vor, worin die Ecken des einen Rhomboeders über die Flächen des andern hervorstehen (Fig. 39) und umgekehrt. Da die hervorstehenden Ecken die Seitenecken sind, so sind sie nicht gleichkantig, wie beim Würfel, sondern 2+1kantig, allein die Fläche (h' Fig. 39) scheidet die Seitenecke (von h) so, dafs die beiden gleichen Kanten unter gleicher, die ungleiche Kante in verschiedener Länge geschnitten wird.

Tritt zum Rhomboeder, gleichviel welchem, die erste sechsseitige Säule, wodurch die Seitenecken des Rhomboeders abgestumpft werden, hinzu, so ist die Gradendfläche der Säule gewöhnlich die gemeinsame Zwillingsebene (Tab. IV. Fig. 43). Vergleicht man diesen Zwillingskrystall mit dem einfachen (Tab. VI. Fig. 9.), so sehen wir im Zwillinge oben und unten eine Rhomboederfläche auf dieselbe Säulenfläche aufgesetzt, ebenso die Kanten, eine Flächen- und Kantenstellung, die schon aus Fig. 38 hervorgeht. Beim einfachen Individuum ist hingegen oben eine Fläche aufgesetzt, wenn unten eine Kante erscheint, und umgekehrt. Diefs Verhältnifs ist dem Granatoeder des regulären Systemes ganz analog, nur dafs wir im Granatoeder die 2te Säule haben, die Rhomboederflächen folglich auf die Kanten aufgesetzt erscheinen. Auch hier kann man der Vorstellung zu Hilfe kommen, wenn man einen einfachen Krystall parallel der Gradendfläche quer durch die Säule halbirt, und das obere gegen das untere Ende um 60° um die Säulenaxe verdreht. Würden die zwei Individuen sich mit einer Säulenfläche aneinander legen, so mufs an ein und demselben Ende das eine Individuum sei-

ne Flächen hinkehren, wo das andere seine Kanten hinwendet. Diefs wird besonders bei Durchwachsungen der Krystalle klar. Da nemlich die drei Säulenflächen beiden gemein sind, so müssen in jeder Lage die Säulenflächen respective mit einander einspielen (in einem Niveau liegen), daher kann in der Säule keine Veränderung vorgehen. Alle neuen Verhältnisse, die etwa zum Vorschein kommen, haben in der rhomboedrischen Endigung ihre Gründe. Bei der Durchdringung mufs daher dieselbe Erscheinung, wie bei den einfachen Rhomboedern (Fig. 39) Statt finden, die Endkanten des einen Krystalls müssen über die Flächen des andern hervortauchen. Der Geübte sieht diefs schon an Fig. 43 ein, wo von dem einen Individuum nur das Unterende, vom andern das Oberende vorhanden ist. Bei der Durchdringung müssen wir uns beide Individuen vollständig denken, es mufs also z. B. zur Unterhälfte des untern Individuums auch noch die Oberhälfte erscheinen, die Rhomboederflächen der Oberhälfte gehen aber denen der Unterhälfte parallel, folglich müssen, wenn am Unterende die Kanten auf die abwechselnden 3 Säulenflächen aufgesetzt sind, am Oberende die entsprechenden parallelen Kanten auf die andern drei abwechselnden Säulenflächen aufgesetzt sein, welche den erstern 3 respektive parallel gehen, und auf welche am andern Individuum die Flächen aufgesetzt erscheinen. Kalkspath und Eisenglanz liefern für alle diese Fälle ausgezeichnete Beispiele.

Auch der Dreiunddreikantner zeigt häufig unser Zwillingsgesetz. Gewöhnlich ist zwei Individuen die Gradendfläche gemein, und von jedem nur eine Hälfte vorhanden, die gegenseitig um 60° verdreht erscheinen. Die Seitenkanten der Dreiunddreikantner sind dabei bedeutend verkürzt, doch die einspringenden Winkel verrathen immer den Zwilling. Denken wir uns in Fig. 44 die kleinen anhängenden Individuen hinweg, so bildet *r/r* oben eine Endkante am obern, *r'/r'* unten eine Endkante am untern In-

dividuum. Beides sind einander gleiche und zwar stumpfe Endkanten, folglich ist stumpfe Endkante auf stumpfe, und scharfe auf scharfe aufgesetzt, beide Halbindividuen müssen sich also in Zwillingsstellung befinden, weil in einem einfachen Individuum (Tab. VI. Fig. 6) die stumpfe Endkante oben mit der scharfen untern und umgekehrt zusammenstofsen mufs. Beide Halbindividuen setzen häufig ihre parallelen Flächen nach den entgegengesetzten Enden fort, wodurch eine Durchdringung eingeleitet wird; die kleinen Anhängsel in Fig. 44 sollen diefs andeuten, worin oben die r/r' das untere Individuum, unten die r/r das obere vollständig zu machen streben. Vergleichen wir daher im untern Halbindividuum die Kante r'/r' mit der Kante r'/r' im obern kleinern Stück, so ist die untere Kante stumpf, die obere scharf, beide gehörig ausgebildet würden daher die gesetzliche Lage der Kanten eines einfachen Individuums haben. Die Kalkspäthe liefern zu diesem Falle die trefflichsten Beispiele. Beim Rothgültigerz durchkreuzen sich die 3und3kantner zuweilen so gesetzmäfsig, dafs regelmäfsig ausgebildete 6und6kantner (p. 274) zum Vorschein kommen, weil die vorspringenden Ecken ganz verschwinden.

Zusatz. Da man das dihexaedrische System mathematisch als eine zwillingsartige Durchdringung von zwei rhomboedrischen Individuen betrachten kann, so folgt daraus, dafs zwei Dihexaeder, wenn sie die Gradendfläche und die Säulenflächen mit einander gemein haben, durch keine Drehung in eine symmetrische Zwillingsstellung gebracht werden können. Denn immer werden bei einer Drehung von 60° um die Hauptaxe die Dihexaederflächen beider Individuen einspiegeln. Dennoch kommt beim *Quarzdihexaeder* eine merkwürdige Erscheinung vor, die man fast genöthigt ist, für Folgen einer Zwillingsbildung anzuerkennen.

Bei Dauphineer Bergkrystallen, die gewöhnlich in Be-

gleitung des pistaziengrünen Epidots vorkommen, wechseln auf den Dihexaederflächen intensiv matte Stellen mit glänzenden ab, wie wir es Fig. 45 Tab. IV. dargestellt haben. Die matten Stellen schneiden scharf an den Säulenflächen ab (nur sehr schwache Spuren, die nicht sowohl durch Mattigkeit als durch etwas geringern Glanz und unterbrochene Streifung bei sehr scharfer Beobachtung sich in günstigen Fällen erkennen lassen, setzen zuweilen noch auf die Säulenfläche fort), und sind in der Regel etwas erhabener, als die glänzenden, so dafs ein scharfes über die glänzenden Stellen hinfahrendes Federmesser am Rande der matten einen kleinen Widerstand findet. So regellos beim ersten Anblick die Zeichnung der Dihexaederflächen erscheinen mag, so bestimmt gesetzlich verhält sie sich gegen die dihexaedrischen Endkanten. Denn wenn auf der einen Seite sich an die Endkante eine lichte Stelle lagert, so ist auf der andern Seite, genau so weit als die lichte geht, eine matte Stelle, alsdann folgt auf dieser andern Seite wiederum eine lichte, der auf der einen wieder eine matte entspricht. Bei allen Krystallen bestätigt sich diefs Gesetz; die matten und lichten Stellen schnüren sich plötzlich so zusammen, dafs in einzelnen Kantenpunkten zwei glänzende und zwei matte Stellen sich kreuzweis gegenüber liegen. Durch diese Punkte stofsen die matten mit den matten, die glänzenden mit den glänzenden Stellen auf den verschiedenen Dihexaederflächen eines Endes aneinander, selten erhebt sich ein rings geschlossener matter Raum aus einem glänzenden Felde und umgekehrt. Ist eine Rhombenfläche vorhanden, so ist sie gern in gleicher Weise, wie die Dihexaederflächen, matt. Daraus folgt dann, dafs wenn eine Fläche ganz matt ist, so sind die angränzenden ganz glänzend, die folgenden wieder matt, drei abwechselnde also matt und drei abwechselnde glänzend.

Die Erscheinung zu erklären geht man vom letzteren

Falle aus, wo matte mit glänzenden Dihexaederflächen abwechseln. Solche Individuen scheinen einfache Krystalle zu sein, an welchem das eine Rhomboeder des Dihexaeders von glatten, das Gegenrhomboeder von matten Flächen begränzt ist. Nennen wir die glatten Dihexaederflächen g, die matten m, und denken uns noch ein zweites Dihexaeder mit den glatten Flächen g', und den matten m', so kann man beide Dihexaeder so gegen einander drehen, dafs die m mit den g' und die g mit dem m' einspiegeln, also in ein Niveau fallen. In dieser Stellung mögen sich nun beide Individuen durchdringen, d. h. wo das eine Individuum einen leeren Raum läfst, mögen die hingehörigen Theile des andern, und wo das andere, die des einen eindringen. Finden sich die Individuen so ineinander, dafs jedes seine matten (m und m') oder seine glänzenden (g und g') Flächen herausstellen kann, so wird der entstehende Zwillingskrystall blofs matte oder blofs glänzende Dihexaederflächen zeigen. Diese beiden Gränzfälle gehören jedoch nur zu den günstigsten Ausnahmsfällen, denn da in jedem Sextanten eine glänzende und eine matte Fläche liegt, die glatte dem einen, die matte dem andern angehörend, so wird jedes Individuum sich bestreben, mit seiner Fläche den Krystall zu begränzen, welches wechselseitige Bestreben nothwendig eine mannigfaltige Flächenzeichnung zur Folge hat. Wenn nun z. B. ein Individuum seine matte Fläche bis zur Kante geltend gemacht hat, so mufs, so bald es sich auch jenseits der Kante geltend macht, jenseits der Kante die glänzende Fläche zum Vorschein kommen, das Matte der einen Seite setzt also das Glänzende der andern Seite der Kante voraus. Nur in dem einzigen Falle müfsten die Zwillingsflächen zu beiden Seiten der Kante dieselbe Eigenschaft zeigen, wenn sich grade beide Individuen in der Dihexaederkante begränzten. Auffallend ist es allerdings, dafs diefs nie geschieht, und dafs die Zwillinge dieser Art sich in ihren Ausdehnungen ganz wie einfache

Krystalle verhalten; die matte Substanz scheint wie über eine formenreiche Bergkrystallgruppe hinweggegossen.

Ganz wie die matten und glänzenden Stellen mit einander abwechseln, so wechseln bei andern drusige und glatte Stellen mit einander ab, oder es reflectiren auch die einen Stellen eine matte grüne, die andern eine matte rothe (die Complementarfarbe!) Farbe.

Wenn zum Dihexaeder am Quarz sich Trapezflächen gesellen, so könnte die Zwillingsstellung zweier Individuen, von denen das eine linke, das andere rechte Trapezflächen hätte, durch die Lage der Trapezflächen erkannt werden, wenn auch alle Dihexaederflächen eine gleiche physikalische Beschaffenheit zeigen würden. Der dadurch erzeugte Zwilling würde linke und rechte Trapezflächen zugleich zeigen. Es kommt sogar bei den gefleckten Dauphineern wiederholt vor, dafs sie linke und rechte Trapezflächen zugleich führen, wodurch man geneigt werden könnte zu glauben, dafs die linken dem einen, die rechten dem andern Individuum angehören dürften. Allein dem widerspricht ein Dauphineer Krystall, wo sich an einer Ecke eine linke und rechte Trapezfläche zugleich findet, und wo links die zugehörige Dihexaederfläche in der Ecke matt, rechts glänzend ist, so dafs also die beiden zur Ecke gehörigen Flächen ein und demselben Individuum angehören, an das sich die Trapezflächen eng anschliefsen.

5. *Das zweite Gesetz des 3gliedrigen (und zugleich des 6gliedrigen) Systems ist: zwei 3gliedrige Oktaeder haben eine der drei gleichen Flächen mit einander gemein, und die übrigen liegen umgekehrt dagegen.*

Beim regulären Systeme war nur ein Zwillingsgesetz, weil es gleichgültig war, welcher der vier gleichen Krystallräume den Zwillingsindividuen gemein wurde. Im dreigliedrigen Systeme, wo die vier Krystallräume sich in 3+1 zerlegen, findet die doppelte Möglichkeit Statt: ent-

weder haben die Oktaeder die 1 gemein, oder eine der 3, wie in diesem Gesetz. Da wir in der Systematik sahen, dafs die Axenlängen nur relativ sind, es also gleichgültig ist, von welchem Oktaeder wir ausgehen, wenn nur das Oktaeder dem jedesmaligen Systeme angemessen ist, so können im 3gliedrigen Systeme die drei gleichen Flächen irgend einem Rhomboeder angehören, denn jedes Rhomboeder bildet mit der Gradendfläche ein dreigliedriges Oktaeder.

Beim Kalkspath allein tritt dieses Gesetz in dreierlei Weise auf; es haben zwei Individuen die Fläche

1) des Hauptrhomboeders,

2) des ersten stumpfern,

3) des ersten schärfern

gemein, gegen welche die übrigen drei Flächen umgekehrt liegen.

Wir wollen nur das Wichtigste, das erste von diesen, kurz durchgehen, weil man leicht das Gesetz für alle Rhomboeder sich entwickeln kann, wenn man es für eins richtig verstanden hat.

Nehmen wir zuvor unsere zwei kongruenten dreigliedrigen Oktaeder zur Hand, so können sie, da jetzt die zur Zwillingsebene gemachte Oktaederfläche gleichschenklich ist, sich nur auf eine einzige bestimmte Art zusammenlegen. Sollen nemlich die beiden Oktaeder eines der gleichschenklichen Dreiecke gemein haben, so müssen die gleichen Schenkel auf die gleichen Schenkel, die Basis auf die Basis fallen, denn zwei gleichschenkliche kongruente Dreiecke können sich nur in *einer* Weise decken.

Lassen wir nun in dieser bestimmten Stellung die drei gleichen Krystallräume sich zu einem Rhomboeder ausdehnen, so erhalten wir die Fig. 46 Tab. IV. Die vierte Oktaederfläche würde die dreikantige Endecke (bei α) abstumpfen. Wenn sich aber zwei 3+1flächige Oktaeder mit einer der drei gleichen Flächen aneinander legen, so

wird die gemeinsame Fläche gegen die andern beiden, denen kein Individuum anliegt, different, wir bekämen also ein 2+1+1 flächiges Oktaeder, das dem 2+1 gliedrigen Systeme anheimfällt. Da aber jedes der beiden Oktaeder 2+1 gliedrig wird, beide ihre gleichen Flächen ($\beta\delta$ und $\beta'\delta'$) nach aussen kehren, so bilden diese gleichen unter sich ein 2+2gliedriges Oktaeder, von dem eine Ecke mit den Kanten $\beta/\delta = \beta'/\delta'$ und $\delta/\delta' = \beta/\beta'$ sichtbar ist. Stellen wir diese Ecke aufrecht, so erhalten wir das *rhomboedrische System in einer zweigliedrigen Stellung.*

Projiciren wir daher das zweigliedrige Oktaeder auf seine zugehörige Hexaidfläche (Tab. I. Fig. B), so würde eine vollständige Deduktion möglich sein, wenn die drei zugehörigen Hexaidflächen des Oktaides zugleich Flächen wären, welche die dreigliedrigen Axen der Rhomboeder unter rationalen Verhältnissen schnitten; zwei Hexaidflächen, die der Axe b entsprechende d und die gemeinsame α erfüllen die Bedingung stets, mögen die Rhomboeder die verschiedensten Winkel haben; allein die dritte, die Projektionsebene, schneidet die rhomboedrischen Axen nur in Ausnahmsfällen rational, gewöhnlich irrational. Wollen wir demnach die mathematischen Verhältnisse näher durchschauen, so müssen wir den Ausdruck der Gradendfläche durch Rechnung finden. Daraus würde sich dann weiter der Axenausdruck für γ und γ', bezogen auf die neuen rechtwinklichen Axen etc., ergeben.

Zum Verständnifs des Systems ist jedoch die Rechenschaft über die absoluten Winkelgröfsen nicht erforderlich. Wir ziehen die Sektionslinien γ und γ' beliebig ein, nur müssen sie vermöge ihrer symmetrischen Lage der Sektionslinie α parallel gehen, und jede von der d auf ihrer Seite dasselbe Stück abschneiden; wie grofs? kann nur in besondern Fällen die Rechnung ermitteln. Deduciren wir uns weiter aus jedem der beiden Oktaide ($\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha\beta'\gamma'\delta'$) die zugehörigen Hexaidflächen (k und k'), so

läfst sich aus der Lage der Zonenpunkte des Hexaides und Oktaides erkennen, welche Flächen beiden Rhomboedern gemein sind. Zunächst sehen wir aus der symmetrischen Lage der Dreiecke $\alpha\beta\delta$ und $\alpha\beta'\delta'$ zum Mittelpunkte $a.d$, dafs alle Sektionslinien des Mittelpunktes Flächen angehören, welche beide rhomboedrische Axensysteme unter gleichem Verhältnifs schneiden. Fläche d z. B. liegt in dem beiden Rhomboedern gemeinsamen Mittelpunkte und in den Kanten h/h, h'/h', β/δ und β'/δ', von denen die gestrichelten Buchstaben dem einen, die nicht gestrichelten Buchstaben dem andern Rhomboeder angehören, sämmtliche gleiche Buchstaben aber homologe Flächen bezeichnen. Fläche d liegt daher in beiden Rhomboedern zugleich in der Hexaid- und Oktaidkante, ist also eine beiden zugehörige Dodekaidfläche. Die Flächen λ liegen in der Diagonalzone (im Mittelpunkt) und einer Kantenzone (δ'/γ' und δ/γ) beider Oktaide, sie sind zugehörige Leucitoidflächen für beide Rhomboeder. So für alle Flächen, die durch den Mittelpunkt gehen.

Ein zweiter ähnlicher Punkt gehört der Vertikalzone an, deren Flächen der Axe b parallele Sektionslinien einsetzen. Denn wir sehen, dafs die Flächen xyz zu beiden Seiten der Axe a in homologe Zonenpunkte fallen, und zu gleicher Zeit die Projektions-Dreiecke ($\alpha\beta\delta$ und $\alpha\beta'\delta'$) der Rhomboeder unter gleichen Verhältnissen schneiden. Da die irrationale Projektionsebene unbestimmt ist, so läfst sich ihr Ausdruck an den rhomboedrischen Axen nicht bestimmen, leicht jedoch an unsern neuen zweigliedrigen Axen.

Der denkende Leser wird nun auch weiter einsehen, dafs eine Menge versteckter Beziehungen zwischen gewissen 3gliedrigen und 2gliedrigen Systemen zum Vorschein kommen müssen, sobald einmal das Rhomboeder so beschaffen sein wird, dafs die Projektionsebene, bezogen auf die rhomboedrischen Axen, sich einem rationalen Ver-

hältnisse nähert. Davon wird dann die einfache Folge sein, dafs wenn wir die Axenlängen ob zur Einheit annehmen, γ und γ' diese Axen unter rationalen Verhältnissen schneiden. Denn würde z. B. beim Kalkspath die Rhomboederfläche zur rhomboedrischen Hauptaxe sich unter 45° neigen, so wäre davon die Folge, dafs γ' und γ, auf die 2gliedrigen Axen bezogen, den Ausdruck

$$\overline{|c : \tfrac{1}{3}b : \infty a|},$$

erhielt. Denn würde z. B. in Tab. I. Fig. B die h' in den Zonenpunkten $\delta . \lambda$ und h in $\delta' . \lambda$ liegen, so schnitten dann sämmtliche Kalkspathflächen die zweigliedrigen Axen der Zwillingsstellung unter rationalen Verhältnissen!

Da wir unter unsern Rhomboedern (oder Oktaedern) kein bestimmtes verstanden haben, so gilt das Gesagte in ganz ähnlicher Weise auch für das erste stumpfere und erste schärfere, ja für jedes beliebige Rhomboeder beider Ordnungen. Mehrere davon finden sich öfter ausser dem Kalkspathe beim Rothgültigerz. Doch wir übergehen hier die speciellen Auseinandersetzungen der einzelnen Fälle.

Zusatz 1. Dafs dieses Zwillingsgesetz zugleich für alle sechsgliedrigen Systeme gelten kann, leuchtet ein, da sich hier kein ähnlicher Grund, wie beim ersten Gesetz, geltend machen läfst. Doch findet sich das Zwillingsgesetz höchst selten. Nur ein einziges Mal ist beim Quarze gefunden worden, dafs zwei Dihexaeder ihre erste stumpfere Dihexaederfläche gemein hatten.

Zusatz 2. Selten, aber doch zuweilen bei dem Rothgültigerz, kommt es vor, dafs an die drei gleichen Flächen eines Rhomboeders sich Individuen nach vorstehendem Gesetze anlagern, sie bilden dann einen Vierlingskrystall. Würden wir das mittlere Rhomboeder, den Träger der drei übrigen, auf die Axenebene seiner dreigliedrigen Seitenaxen projiciren, so würden zwar die andern Rhomboeder sich in dreigliedriger Ordnung zu den Axen stellen, allein un-

ter welchen Verhältnissen, läfst sich nur durch Rechnung ermitteln. Es entstünde also durch den Vierling wieder ein vollständiges dreigliedriges System, wie im regulären System (3. *Zus.* 3) durch den Fünfling ein vollständiges reguläres.

6. *Das hauptsächlichste Zwillingsgesetz des viergliedrigen Systems ist: Zwei Oktaeder haben eine Oktaederfläche mit einander gemein, und die übrigen liegen umgekehrt.*

Da das viergliedrige Oktaeder nur gleichschenkliche Dreiecke hat, so folgt daraus, dafs zwei gleiche Oktaeder dieser Art sich nur in einer einzigen Stellung mit der gemeinsamen Fläche decken können. Welches der viergliedrigen Oktaeder (ob aus der 1sten oder 2ten Ordnung) beiden Zwillingsindividuen gemein sei, ist für die Betrachtung gleichgültig, da man jedes der Oktaeder als Hauptoktaeder nehmen dürfte. Allein bemerkenswerth ist es doch, dafs bei den wichtigsten Zwillingen dieses Systems (Zinnstein und Rutil, beide isomorph, nebst dem Ichthyophthalm ähnlichen Scharfmanganerze) die gemeinsame Oktaederfläche dem *ersten stumpfern* angehört, indem das diesem zugehörige Hauptoktaeder häufig vorherrschend wird, ja zuweilen gar keine andern Flächen ausser dem Hauptoktaeder vorhanden sind, wie Tab. IV. Fig. 47, der Zwillingskrystall des Scharfmanganerzes, zeigt. Beide Individuen haben sich mit einer Endkante (d. h. mit einer Fläche, welche die Endkante abstumpft) an einander gelegt, und sind nach dieser Richtung etwas verkürzt, und zwar so, dafs die obere Zwillingskante o'/o in einem einspringenden, die untere o'/o in einem ausspringenden Winkel liegt. Noch deutlicher sehen wir das Verhältnifs ein, wenn wir beide Oktaeder nach einer Seitenaxe a aufrecht stellen, und die Flächen auf die Axenebene ac projiciren (Tab. IV. Fig. 48). Die gemeinsame Fläche

wird dann in ihrer Bewegung sowohl die Kante *d* als auch *d'* in gleicher Weise abstumpfen, und ausserdem spiegelt noch die Projektionsebene, die eine zu beiden Oktaedern zugehörige Hexaidfläche (Säulenfläche) ist, ein.

Treten zum Oktaeder die Säulenflächen hinzu, wie diefs beim Zinnstein (Fig. 49) gewöhnlich ist, so darf man nur erst über die Stellung der einzelnen Individuen sich Rechenschaft geben. So erkennt man z. B. bald am rechten Individuum die erste Quadratische Säule *d/d*, auf deren Flächen die Oktaederflächen *o* unter rechten Winkeln gegen die Säulenkanten aufgesetzt sind. Dasselbe gilt auch vom linken Individuum. Beide Krystalle liegen so aneinander, dafs die Fläche der zweiten Quadratischen Säule sowohl die Kante *d/d* als auch *d'/d'* in gleicher Weise abstumpfen würde. Ausserdem würde die durch die Kanten *d/d'* und *d/d'* bestimmte Zwillingsebene die äussern Oktaederkanten *k* und *k'* abstumpfen, denn die Flächen *do* und *d'o'* beider Individuen liegen nicht nur gegen die Zwillingsebene symmetrisch, sondern die Oktaederkanten *k* und *k'* gehen auch der Zwillingsebene parallel. Wenn die Zwillingsebene aber die Endkante des Oktaeders abstumpft, so darf man nur einen einfachen Zinnsteinkrystall sich denken, denselben parallel seiner stumpfern Oktaederfläche beliebig durchschneiden, und zwei solcher kongruenten Seiten symmetrisch an einander legen.

Beim Zinnstein sieht man oben (an der sogenannten Visirecke *o'o*) meist noch einen durch die Oktaederflächen gebildeten einspringenden Winkel. Tritt aber das nächste stumpfere Oktaeder noch hinzu, oder dehnt sich die Säule vorherrschend aus, so verschwindet der einspringende Winkel, und die Säulen bilden ein einfaches Kniee, wie diefs beim Rutil (Fig. 50) so deutlich vorkommt, wo meistens ausser den Säulen und der Gradendfläche keine andern Flächen vorhanden sind. Dächten wir uns am Rutilkrystall Fig. 50. Tab. IV. die Säulenflächen *d'k''* und

$d'k'$ gehörig ausgedehnt, so erhielte das Zwillingsindividuum eine deutliche Kniegestalt. Da beide Individuen sich nicht durchdringen, sondern nur aneinander gewachsen sind, so bestimmen die Kanten d'/d'' und k'/k'' uns die Lage der Zwillingsebene, welche, parallel mit sich bewegt, die oktaedrische Endkante k'' grade abstumpfen würde. Die Flächen k' und k'' liegen in einem Niveau, also ist es ganz der Zwilling des Zinnsteins. Nicht selten gesellt sich noch ein drittes Individuum hinzu, dieses legt sich immer an eines der beiden Individuen *entweder* so, dafs es mit keiner parallel liegt, dann bildet sich ein doppeltes Knie, und wenn sich viele Individuen in dieser Weise durchwachsen, so bilden sich die sogenannten *gestrickten* Formen des Rutils; *oder* so, dafs es die Fortsetzung des andern ist (Individuum dk liegt dem $d''k''$ parallel), dann bilden kd und $k''d''$ scheinbar einen einfachen Krystall, zwischen dessen Säule ein Stück ($k'd'$) in knieförmiger Lage zwischen geschoben ist. Mag auch das Stück nur klein sein, so läfst es sich an der Unterbrechung der markirten Längsstreifung der Säule stets erkennen, denn die Streifen der Säule müssen ein gleiches Knie mit der Säule bilden. Solche Aneinanderreihungen setzen sich zuletzt noch weiter ins Unbestimmte fort, so dafs eine Säule 3 - 4 Zwischenstücke haben kann, die wechselseitig mit einander parallel gehen; wenn aber kein Individuum dem andern parallel geht, so bilden n Individuen $n-1$ Knieen.

Da jedes Oktaeder 4 Endkanten hat, so bildet sich, analog dem regulären und 3gliedrigen Systeme, zuweilen ein Individuum zum Träger von 4 andern aus, indem zu jeder seiner Endkanten ein Individuum nach dem Zwillingsgesetz tritt. Der Gesammtkrystall ist also ein Fünfling (Scharfmanganerz).

Haben wir das Zwillingsgesetz des viergliedrigen Systems eingesehen, so erweitern wir unsern Gesichtskreis, wenn wir einen vergleichenden Blick auf die Zwillings-

stellung der beiden vorhergehenden Systeme (gleich- drei- und sechsgliedrigen) werfen. Im regulären Systeme haben wir den Würfel, das Oktaeder und Granatoeder als die einfachsten Körper kennen gelernt. Verstehen wir unter dem Ausdrucke *„zwei Körper haben eine Fläche gemein"* nicht blofs, dafs die gemeinsame Fläche in beiden Individuen parallel gehe, sondern dafs zugleich auch die Flächen bei zwei kongruenten Körpern im Gleichgewicht sich decken, so ist in Beziehung auf diese drei Körper im regulären Systeme nur *ein* Zwillingsgesetz vorhanden, nemlich *die Oktaeder haben eine Fläche gemein.* Denn haben in diesem Sinne zwei Würfel eine Würfelfläche, und zwei Granatoeder eine Granatoederfläche gemein, so gehen alle ihre Glieder wechselseitig parallel, sie befinden sich also nicht in Zwillingsstellung. Beim 3gliedrigen System können wir einen Zwilling bekommen, wenn die Zwillingsindividuen eine Hexaidfläche oder eine Fläche des Rhomboeders im Dodekaide gemein haben, und gegen diese gemeinsame Ebene umgekehrt liegen. Haben die Individuen die sechsseitige Säule des Dodekaides gemein, so gibt das keinen Zwilling. Sämmtliche Möglichkeiten kommen in besagtem Systeme vor.

Anders verhält sich die Sache im viergliedrigen Systeme. Stellen wir hier irgend ein Oktaeder als Hauptoktaeder fest, dem wir die Grundverhältnisse der drei Axen entnehmen, so sind das deducirte Hexaid und Dodekaid bestimmt. Wie im regulären Systeme erhalten wir auch hier einen Zwilling, wenn die zwei Oktaeder eine Fläche gemein haben. Da das deducirte Hexaid 2+1flächig (h, h, h') wird, so kann der Ausdruck, zwei Hexaide haben eine Fläche gemein, auf verschiedene Weise genommen werden. Entweder können die beiden Zwillingsindividuen eine *homologe* Fläche gemein haben, und zwar h oder h', diefs giebt keinen Zwilling; oder eine *nicht homologe*, d. h. h des einen Individuums legt sich an h' des

andern, diefs gäbe zwar einen Zwilling, allein er kommt nicht vor. Beim 4+2flächigen Dodekaide erhalten wir keinen Zwilling, wenn die Zwillingsindividuen eine der 2 Flächen (die Säulenfläche der 1sten vierseitigen Säule), wohl aber, wenn sie eine der 4 Flächen (Flächen des 1sten stumpferen Oktaeders) gemein haben, und diefs ist das Hauptgesetz des 4gliedrigen Systems.

Bemerkenswerth ist es, dafs bei entschiedenen viergliedrigen Systemen nur immer diefs letztere Gesetz aufzutreten scheint. Allein beim Kupferkies, wo ein Oktaeder vorherrscht, das sich dem regulären sehr nähert (Endkantenwinkel 109°.53', das Reguläroktaeder 109°.28', Differenz knapp 25'), findet sich das Zwillingsgesetz des regulären Oktaeder. Wenn der Kupferkies wirklich viergliedrig ist, so könnte man auch im Zwillingsgesetze eine Annäherung beider Systeme vermuthen, wofür auch die geneigtflächige Hemiedrie spricht.

Zusatz. Wenn im viergliedrigen Systeme die 4+4kantner nur zur Hälfte auftreten (Tungstein, Scheelbleierz, Gelbbleierz, Fergusonit und Humboldtilith), so entsteht das vollflächige Individuum, wenn sich ein linker und ein rechter Krystall durchdringen. Es gehen dann alle Flächen bezüglich parallel, nur die hemiedrischen nicht, weil diese, in beiden Individuen zur Hälfte auftretend, im neuen dritten einen vollflächigen 4+4kantner bilden. Beim Tungstein findet sich diefs zuweilen, die Durchdringung ist aber immer so vollkommen, dafs alle Flächen genau einspiegeln und scheinbar ein einfaches Individuum bilden, wonach sich dann auch natürlich die Flächenstreifung richten mufs. Beim Kupferkies durchdringen sich häufig auch zwei Tetraide nach dem Gesetze des regulären Systems.

7. *Das hauptsächlichste Zwillingsgesetz des zweigliedrigen Systems ist: zwei Oktaeder haben eine zugehörige Dodekaidfläche gemein, die übrigen liegen folglich umgekehrt dagegen.*

Da im zweigliedrigen Systeme das Dodekaid sich in 3 Flächenpaare zerlegt, jedes Flächenpaar sich möglicher Weise zu einer lang gezogenen geschobenen Säule ausdehnen kann, so darf man nur, um das Gesetz verstehen zu lernen, hauptsächlich auf die Säule sehen. Tab. IV. Fig. 37 und 48 können als die Querschnitte solcher Säulen angesehen werden, woraus man erkennt, dafs die eine nach der einen, die andere nach der andern Seite gewendet ist. Ausser der gemeinsamen Säulenfläche spiegeln in beiden Individuen auch noch die Gradendflächen der Säulen ein, was beider Stellung mathematisch bestimmt. Eine solche einfache Zwillingsbildung kommt bei einer grofsen Reihe 2gliedriger Minerale vor (Arragonit, Weifsbleierz, Strontianit, Witherit etc.).

Wie sich zwei Individuen an einander legen, so legen sich mehrere an einander. Wie weit sich dieses Gesetz fortsetzen kann, hängt von der Gröfse des Säulenwinkels, und je nachdem die Individuen ihre stumpfen oder scharfen Säulenwinkel in einem Punkte vereinigen, ab. Beim Binarkies (zweigliedrigem Schwefelkiese) beträgt der scharfe Säulenwinkel 74°. Legen sich also vier Individuen (*abcd* Fig. 51) mit ihrem scharfen Säulenwinkel an einander, so beträgt der Winkel $74^0.4 = 296^0$, folglich bleibt noch zwischen *a* und *d* ein Zwischenraum von $360^0 - 296^0 = 64^0$, in welchen kein fünftes Individuum mehr hineinpafst, da der Winkel um 10° zu klein ist, doch zwängen sich zuweilen Bruchstücke des 5ten Individuums hinein, die den Kreis unvollkommen schliefsen. Beim Weifsbleierz liegen die stumpfen Säulenwinkel von 117° 14′ in einem Punkte (Fig. 52), sie betragen zusammen 351° 42′, folglich bleibt zwischen *a* und *c* ein scharfer Winkel von 8° 18′, der bei weitem für das 4te Individuum nicht hinreicht. Dennoch zwängt sich beim Arragonit noch ein viertes Individuum (*d*) hinein, und zwar so, dafs *cd* in demselben Zwillingsverbande wie *ab* stehen. Wo sich die Individuen *a* und

d durchdringen, bleibt zuweilen ein kleiner einspringender Winkel γ, oder sie gleichen sich auch im Winkel δ aus. Die neue sechsseitige Vierlingssäule hat dann nothwendig dreierlei Winkel, α, β und δ.

Die Schwierigkeit der Zwillingsverhältnisse wächst, wenn die Individuen nicht bloſs an einander liegen, sondern sich theilweis oder ganz durchdringen. Geht die Durchdringung bloſs nach einer Richtung hin (Fig. 53), so setzt sich a in a^0 a' a^2, und b in b^0 b' etc. fort. Das Ganze ist also ein langgezogener Zwilling, worin oscillatorisch das eine oder andere Individuum sich geltend macht. Gehören die beiden äussern Enden demselben Individuum (a und a^2) an, so dehnen diese nicht selten auf Kosten der zwischenliegenden Stücke sich so aus, daſs das Ganze wie ein einfaches Individuum erscheint, zwischen dessen Hälften eine kaum sichtbare Lamelle eingeschoben ist, die jedoch auf dem Querschliff, namentlich bei optischen Untersuchungen, deutlich hervortritt (Arragonit). Dehnen sich beide Individuen bis zur Durchkreuzung aus, so erhalten wir zwei sich kreuzende Tafeln (Fig. 54) mit einspringenden Winkeln. Dieſs ist jedoch die seltenste Erscheinungsweise. Gewöhnlich füllen sich die einspringenden Winkel theilweis oder ganz mit Masse. Beim Binar- und Arsenikkies erscheint z. B. der Zwilling wie in Fig. 55. Den einfachen Zwilling bilden a und b, das Individuum b setzt sich nach b^0, a nach a^0 fort, und die zwischen a b^0 und a^0 b liegenden einspringenden Winkel füllen sich mit Substanz, die beiden Zwillingsindividuen angehört. Füllen sich endlich noch die beiden einspringenden Winkel zwischen ab und $a^0 b^0$, so bekommen wir eine einfache sechsseitige Säule (Fig. 56). Diese Winkel auszufüllen, können wir in Fig. 55 die punktirten Linien uns denken, oder wir können auch die Individuen wie in Fig. 56 stellen, worin a in a^0, b in b^0 fortgesetzt erscheint, dazwischen bleibt ein Raum c, der sich mit Materie ausfüllt. Rückt

man in Gedanken b^0 an a und a^0 an b, so bekommen wir die Reihe in Fig. 53. Wer den Begriff des Krystallraums festhält, wird sich in alle die verschiedenen Vorstellungsweisen mit Leichtigkeit finden. Die entstehende sechsseitige Säule hat vier gleiche Winkel β und zwei gleiche α. Das Verhalten der Endflächen in der Säule erkennt man leicht, wenn man sämmtliche Flächen auf die Gradendfläche der Säule projicirt, was wir übergehen wollen.

Wenn nun aber schon der Zwilling zu so mannigfaltigen Betrachtungen der Säule Stoff gibt, so müfste das Verhältnifs noch verwickelter werden, wenn wir die einzelnen Erscheinungsarten in gleicher Weise auch für den Drilling durchführen wollten. Nur Folgendes sei darüber im Allgemeinen bemerkt: Verbinden sich drei Individuen abc zu einem Drillinge, so zeichne man die drei Säulen auf eine beliebige Weise an einander, doch so, dafs zwei Mal je zwei sich in einer Zwillingsstellung befinden (ab, bc; ac, bc oder bc, ac), wie z. B. abc in Fig. 51 und 52. Legen wir dann durch irgend einen Punkt der drei Krystallindividuen Flächen, den Säulenflächen einer der drei Individuen parallel, so gehören diese neuen Säulenflächen demjenigen Individuum an, dessen Säulenflächen sie parallel gehen, man sagt, das Individuum habe sich bis dahin ausgedehnt. In diesem Sinne ist daher der Drilling abc Fig. 51 mit dem Drillinge abc Fig. 52 ganz gleich, der eine ist aus dem andern nur durch theilweise Durchdringung entstanden. Denn lasse ich Fig. 51 den Zwilling ab bestehen, ziehe aber durch den Punkt (o) der stumpfen Säulenwinkel eine Linie der cd parallel, und ergänze diese punktirte Linie zur Säule c^0, die nur die Fortsetzung von c bildet, so bilden abc^0 denselben Zwilling, wie abc in Fig. 52. Dasselbe Zwillingsgesetz zeigt sich in Fig. 57 und 58. Denn in Fig. 57 bilden die Rhomben ab einen Zwilling, der dritte Rhombus c hat sich an die Seite s nicht nach Aussen, sondern nach Innen ge-

legt. Würde ich Rhombus *c* parallel mit sich verrücken, und den Punkt *o'* auf *o* legen, so erhielten wir den Zwilling *abc* Fig. 51. Aehnliches gilt für Fig. 58, wo *b* an der einen, *c* an der andern Innenseite von *a* liegt. Aus dieser Betrachtung erklärt sich Fig. 52, worin 4 Individuen (*abcd*) mit ihrem stumpfen Winkel in einen Punkt fallen. Denken wir uns *c* und *d* parallel und in den Punkt β der *ab* gelegt, so erhalten wir den Vierling Fig. 51, Fig. 52 ist daher nur eine besondere Erscheinungsweise von Fig. 51 etc. . . .

Wenn wir die Gesetze für die einfache Säule verstanden haben, dann können wir weitere Abstumpfungsflächen hinzutreten lassen. Dächten wir uns in Fig. 37 und 48 die punktirten Linien *h* (Fig. 56) hinzu, welche die scharfe Säulenkante abstumpfen, so können dieselben sich so weit ausdehnen, dafs die einspringenden Winkel des Zwillings abgeschnitten würden, der Krystall sich einer einfachen Säule näherte. Wie die Abstumpfungsflächen liegen müssen, folgt aus der Lage der Säulenindividuen und deren Seitenaxen. In Fig. 56 würden sie z. B. die scharfen Säulenkanten abstumpfen, wie aus der Lage der Linien gegen $a\,b\,a^0\,b^0$ folgt. Fällt die zwischen diesen Linien liegende Masse weg, so erhalten wir den Krystall Fig. 59, der häufig beim Weifsbleierz vorkommt, worin die Säulenflächen *d* und *d'* wenig, die Abstumpfungsflächen *h* stark ausgedehnt sind, wie Fig. 59 zeigt.

Da das Dodekaid sechs Krystallräume hat, so könnte ein Individuum der Träger von sechs andern sein. Doch wären dann an dem einen Individuum drei verschiedene Zwillingsgesetze verwirklicht, denn jeder Säule entspricht ein besonderes Gesetz. Bei den meisten Mineralien (Arragonit, Weifsbleierz, Strontianit, Witherit, Kalisalpeter, Epistilbit, Bournonit, Sprödglaserz, Kupferglas), die dieses Gesetz zeigen, finden wir nur immer die Verwachsung nach einer einzigen Säule. Beim Arsenikkies und dem so

verwandten Binarkies (zweigliedrigem Schwefelkies) finden wir jedoch zwei Gesetze neben einander bestehend: zwei Individuen haben entweder die Säulenfläche

$$\overline{|a : b : \infty c|}$$

(111° 53' Arsenikkies, 106° 2' Binarkies), oder die auf die stumpfe Säulenkante aufgesetzte

$$\overline{|a : c : \infty b|}$$

gemein, beim Arsenikkies ist letzteres, beim Binarkies ersteres gewöhnlich. In der Regel treten beide Gesetze gesondert auf, nur in seltenen Fällen finden wir an einem Individuum beide Gesetze bestätigt, dann entstände also möglicher Weise ein Fünfling, aber anderer Art, als die obigen.

Zusatz 1. Nach dem Hauptgesetze des regulären und dreigliedrigen Systemes: zwei Oktaeder haben eine Oktaederfläche gemein, finden sich wenige Zwillingskrystalle. Ihre Darstellung fällt der rechnenden Krystallographie anheim. Nur beim Kupferglas hat Mohs ausser dem gewöhnlichen auch dieses nachgewiesen. Ausserdem zeigen die Durchkreuzungskrystalle des Stauroliths unter einem Winkel von 60° etwas Aehnliches. Da aber 2 Dimensionen des Stauroliths sich dem rationalen Verhältnisse sehr annähern, so hat Professor Weiss dieses System dem regulären zugewiesen.

Zusatz 2. Die drei Krystallräume ($h h' h''$) des zweigliedrigen Hexaides sind physikalisch different, schneiden sich aber noch unter rechten Winkeln. Haben nun zwei solcher gleichen Hexaide eine Fläche h'' gemein, so können entweder h und h' in beiden Individuen einspiegeln, oder das eine kann sein h hinwenden, wo das andere sein h' hat, und umgekehrt. Im letztern Falle würde ein zwillingsartiges Verhältniſs entstehen, im erstern nicht, denn alle Glieder beider Individuen laufen parallel. Man könnte bei den (scheinbar) rechtwinklichen Durchkreuzungskrystallen des Staurolithes und Kreuzsteines eine Bestätigung

dieses Zwillingsgesetzes sehen wollen. Der selten einfach erscheinende Kreuzstein (Fig. 63) bildet fast genau ein Granatoeder, die Winkel *d/d*, *d/d°* und *d/d'* weichen um wenige Minuten von 120° ab. Allein nur die vier ein Oktaeder bildenden Krystallräume *d* sind unter sich physikalisch gleich, sie sind von den Säulenflächen *d°* und *d'* verschieden. Ferner sind auch diese Säulenflächen verschieden, wie schon die Streifung und der Blätterbruch bezeugen, denn *d°* ist entschieden deutlicher blättrig als *d'*. Folgen wir diesen Andeutungen, so müssen wir das Oktaeder *d* für zweigliedrig erklären, dessen differente Seitenecken durch physikalisch verschiedene Flächen (*d°* und *d'*) abgestumpft werden. Mit dieser Ansicht stimmen auch die Abstumpfungsflächen *l* überein, welche nur die über *d°* liegenden Kanten abstumpfen, die über *d'* liegenden nie, es müssen demnach die oktaedrischen Endkanten zweierlei sein. Zwei solcher Krystalle (Fig. 64) durchdringen sich nun dergestalt, dafs der eine seine *d'* hinkehrt, wo der andere seine *d°* hat, und umgekehrt, die Kanten der *l* durchkreuzen sich dann rechtwinklich. Füllen sich die einspringenden Winkel mit Materie, so bekommen wir einen vollständigen viergliedrigen Krystall. Aehnliches findet auch bei Staurolith Statt.

8. *Das hauptsächlichste Zwillingsgesetz des Zweiundeingliedrigen Systems ist: zwei Krystalle haben eine Fläche der Hauptsäule gemein und ihre Vorder- und Hinterseite der Endfläche liegt umgekehrt.*

Hauptsäulenflächen nennen wir diejenigen, welche der Hauptaxe *c* parallel laufen. Vergleichen wir die einfachen Augitkrystalle (Tab. VII. Fig. 18 und 19) mit ihrem Zwillinge (Tab. IV. Fig. 65), so zeigt sich in den erstern eine entschiedene Verschiedenheit in der Vorder- und Hinterseite, während im letztern das Vorn und Hinten gleich ist, denn wir sehen auf die Vorderfläche *h'* dieselben *o'* aufgesetzt, wie hinten. Die vordern *o'* (Fig. 65) gehören dem

einen, die hintern dem andern Individuum an, welche beide parallel einer Fläche k' sich in dieser Weise an einander gelegt haben. Ein Theil der Flächen der einzelnen Individuen ist verschwunden, und zwar der der Vorderseite, weil hier überhaupt selten Flächen erscheinen. Dadurch ist am obern Ende ein vollständiges zweigliedriges Oktaeder entstanden, während am untern die dem Oktaeder parallelen noch einspringende Winkel zeigen, so dafs man daran deutlich die einzelnen Individuen erkennt. Vergleicht man die einzelnen Säulenflächen genauer, so spiegeln nicht nur die k'' ein, sondern auch die Flächen (d) der geschobenen vierseitigen Säule gehen respektive einander parallel. Man kann also sagen, die beiden Individuen haben die Säulen miteinander gemein, können sich demnach mit irgend einer dieser Flächen so an einander legen, dafs ihre differenten Endigungsflächen nach entgegengesetzter Richtung stehen.

Um eine solche Stellung zu bewerkstelligen, brauche ich nicht etwa ein Individuum um das andere in bestimmter Weise herumzudrehen (eine solche Vorstellung ist durchaus naturwidrig), sondern wenn ich zwei gleiche, z. B. Feldspathkrystalle habe, so bringe ich sie mit irgend einer homologen Fläche aus der Säulenzone an einander gelegt in parallele Stellung. Die Krystalle sind in Parallelstellung, wenn (Tab. III. Fig. 1—4) Säulenfläche T des einen auf T des andern Individuums so liegt, dafs in beiden die Hauptaxe c parallel steht, und die Schiefendfläche einspiegelt. Unterscheiden wir für einen Augenblick die Gränzflächen der Krystallräume der geschobenen Säule mit $T T_0$ $T T_0$ (Fig. 74 und 75), so werden die beiden einzelnen Individuen einen Zwilling bilden, wenn sie bei gemeinsamer Säule sich mit den gleichnamigen Flächen an einander legen (T auf T, T_0 auf T_0 etc.). Was für die Säule T gilt, gilt auch für den zweiten blättrigen Bruch M; benenne ich auch hier eine Gränzfläche des Krystall-

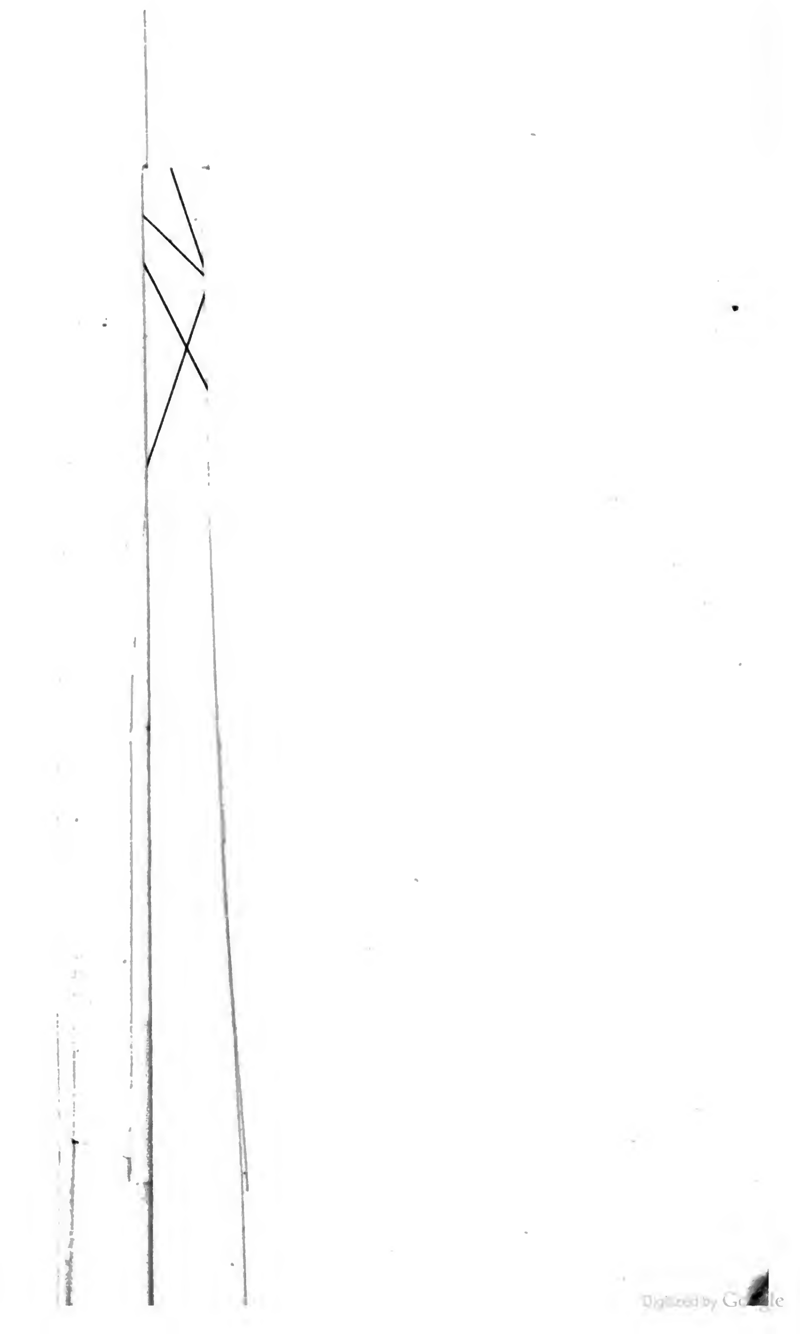
raums M mit M^0, die andere mit M, so erhalte ich den Zwilling, wenn die M zusammen liegen (Fig. 66. Tab. IV), oder wenn ich die M^0 an einander lege. Zugleich leuchtet aus der Figur 66 ein, dafs P des einen Individuums nach vorn, P des andern nach hinten gekehrt sein mufs. Der 2+1gliedrige Krystall ist dadurch 2+2gliedrig geworden. Beim Feldspath, Augit, Hornblende, Gyps, Wolfram etc. findet sich das Gesetz.

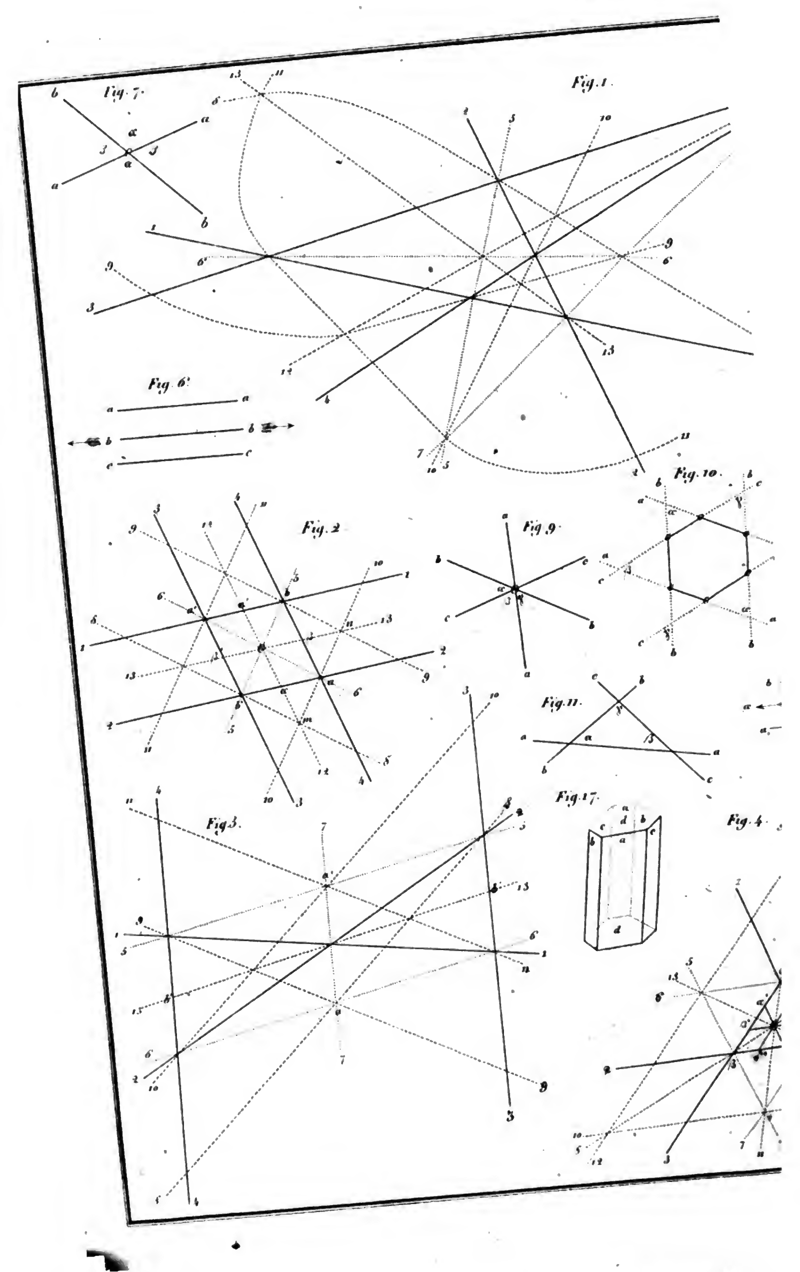
Zwar kommen noch eine Reihe anderer Zwillingsgesetze in diesem Systeme vor, da aber die tiefere Einsicht in dieselben nicht ohne Rechnung erlangt werden kann, so lassen wir sie hier unerwähnt.

9. *Das hauptsächlichste Zwillingsgesetz des Eingliedrigen Systems ist: Zwei Krystalle haben eine Fläche der Hauptsäule gemein, ihre differenten Seitenglieder liegen umgekehrt.*

Nur bei den Feldspathartigen eingliedrigen Systemen sind bis jetzt Zwillinge bekannt geworden. Wir haben, pag. 364, gesehen, dafs z. B. beim Albit nicht nur die Säulenflächen T und T' (Fig. 67 Tab. IV) different werden, sondern auch P gegen M anders geneigt ist, als gegen M^0. Denn der Säulenwinkel P/M ist stumpf, P/M^0 hingegen scharf. Denken wir uns also zwei gleiche Individuen, so werden sie bei gemeinsamer Säule parallel stehen, wenn ich M im einen Individuum gegen M^0 im andern so lege, dafs der scharfe Winkel P/M^0 des einen am stumpfen Winkel P/M des andern Individuums liegt. Lasse ich hingegen das eine Individuum ruhen und kehre im andern die untere Schiefendfläche P^0 herauf, so kommt der stumpfe Winkel P^0/M^0 des einen an den stumpfen Winkel P/M des andern zu liegen, es entsteht folglich auf der Schiefendfläche beider (Fig. 68 P und P^0) ein sehr wenig einspringender Winkel, die Schiefendfläche des Zwillings erscheint ein wenig parallel der Diagonale gebrochen. Der einspringende Winkel des einen Endes setzt einen aus-

springenden am andern Ende voraus. Zugleich sehen wir am Zwilling die linke und rechte Seite des Krystalls unten und oben von gleichen Gliedern eingenommen, es bleibt folglich nur noch das Hinten und Vorn different, der Einundeingliedrige Krystall hat durch seinen Zwilling ein Zweiundeingliedriges System erzeugt. Solche Zwillinge treten dann abermals nach zweiundeingliedrigen Zwillingsgesetzen in Verbindung, wodurch dann eine Zweiundzweigliedrige Ordnung eingeführt wird. Doch bevor wir Gesetze der Art beleuchten können, müssen wir uns mit der Berechnung der Krystalle innig vertraut gemacht haben, weil die Verhältnisse der eingliedrigen Zwillingsgesetze den Schlufsstein aller krystallographischen Betrachtungen bilden.




Fig. 7.
Fig. 1.
Fig. 6.
Fig. 10.
Fig. 2
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 17.
Fig. 3.
Fig. 4.

Tab II

Fig. 5

Fig. 13

Fig. 16

Fig. 14

Fig. 15

Fig. 12

Fig. 18.

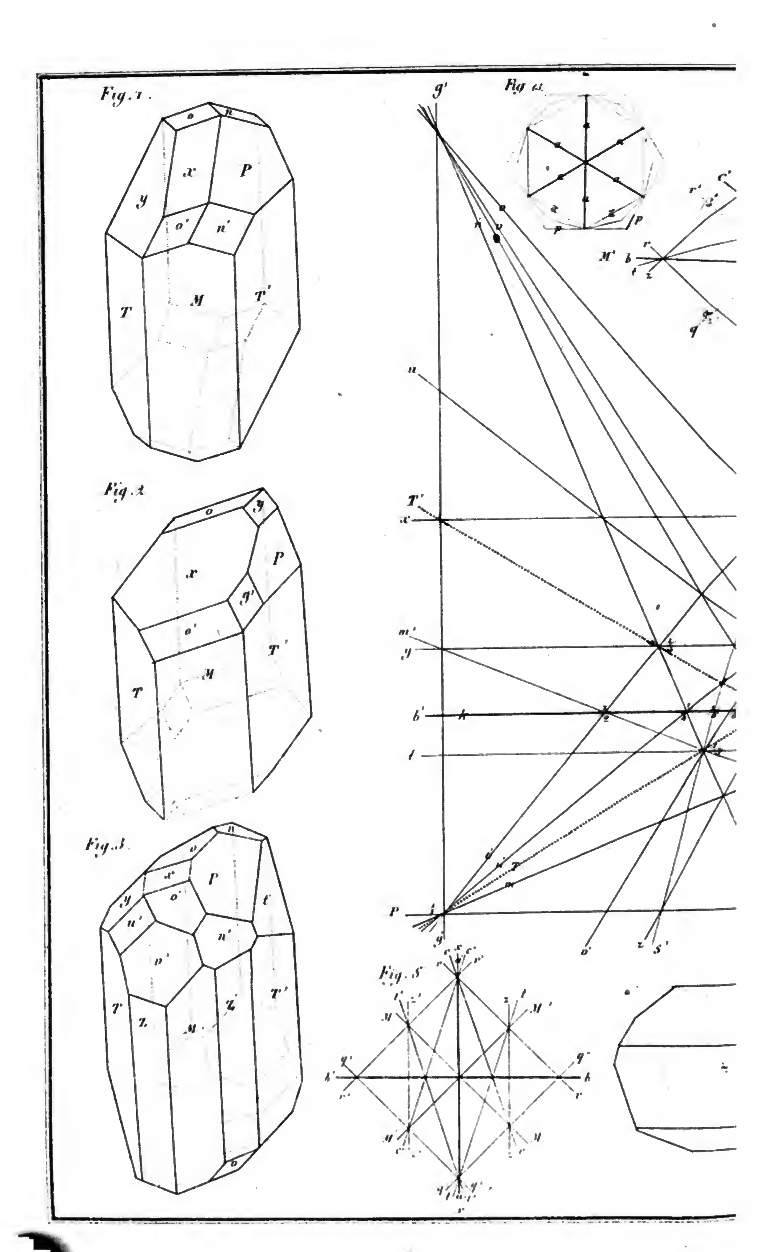
Fig. 19.

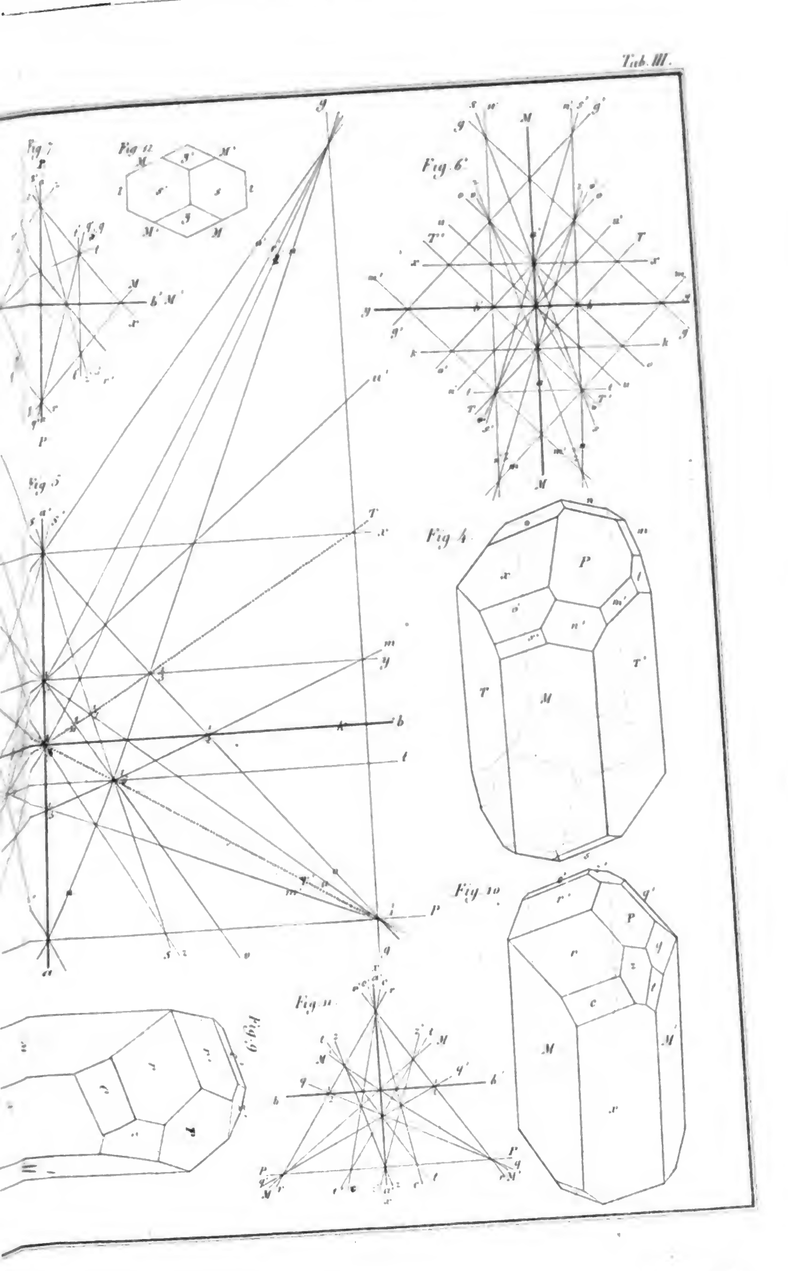
Fig. 20

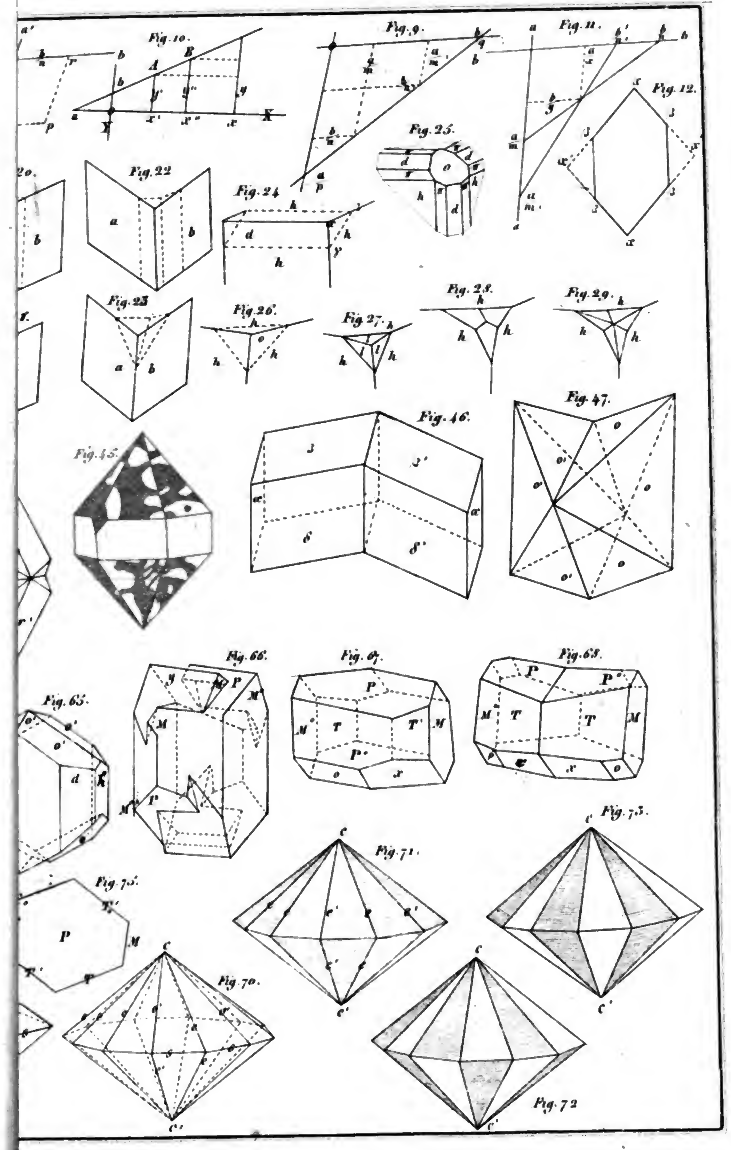
Fig. 21.

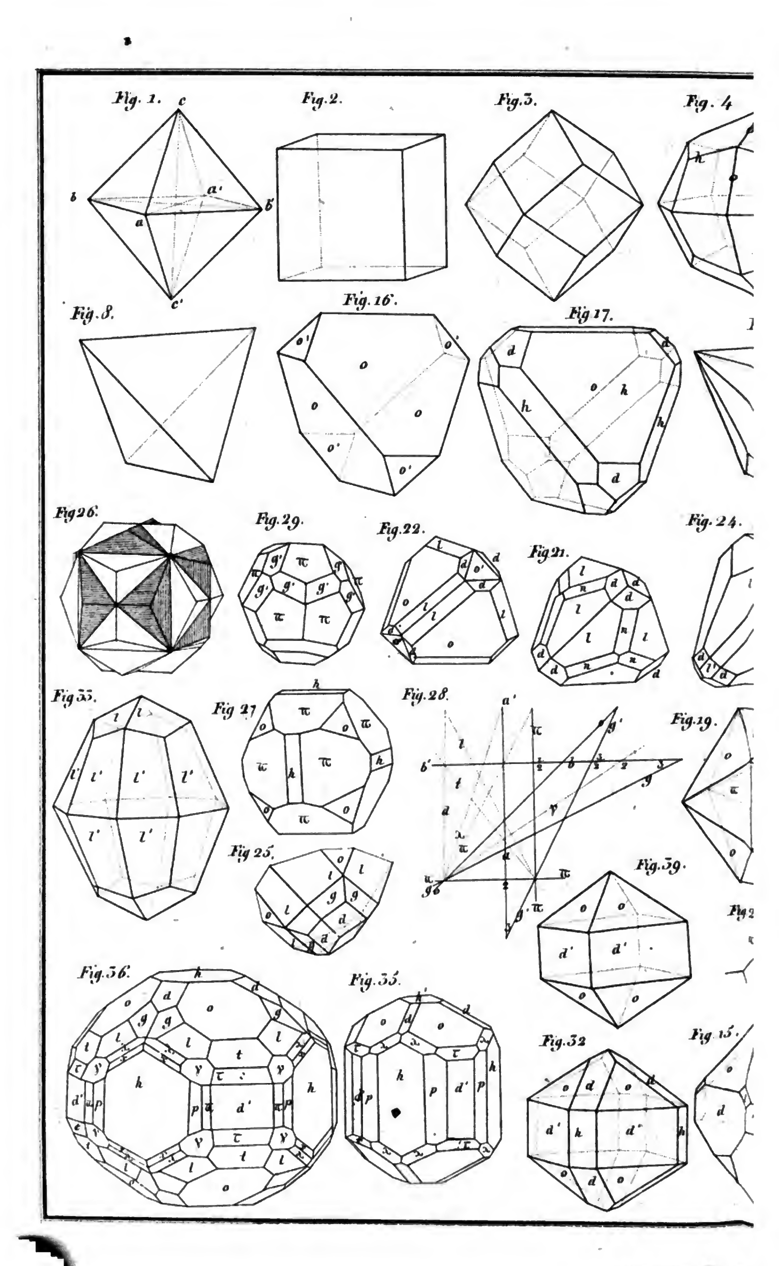
Fig. 23

Fig. 24.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.


Fig. 7.
Fig. 12.
Fig. 6.
Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 9.


Fig. 10.
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 25.
Fig. 22
Fig. 24
Fig. 23
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 45.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 65.
Fig. 73.
Fig. 71.
Fig. 75.
Fig. 70.
Fig. 72



Tab. V.

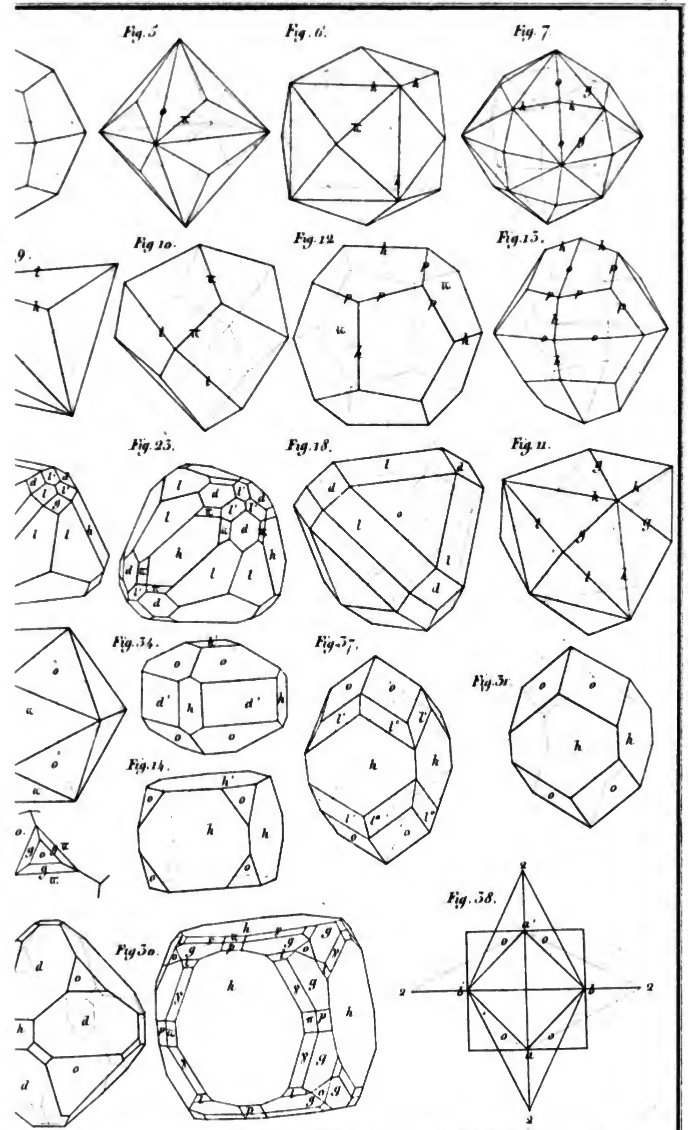
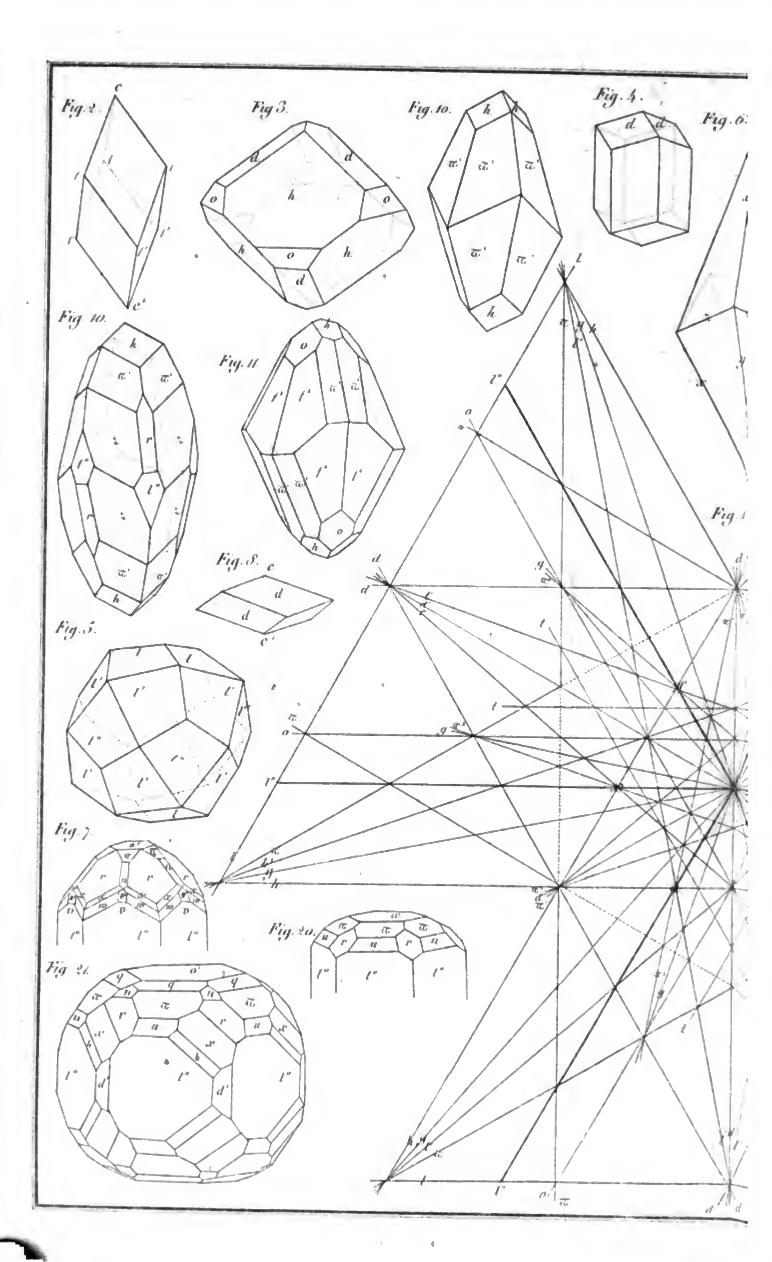
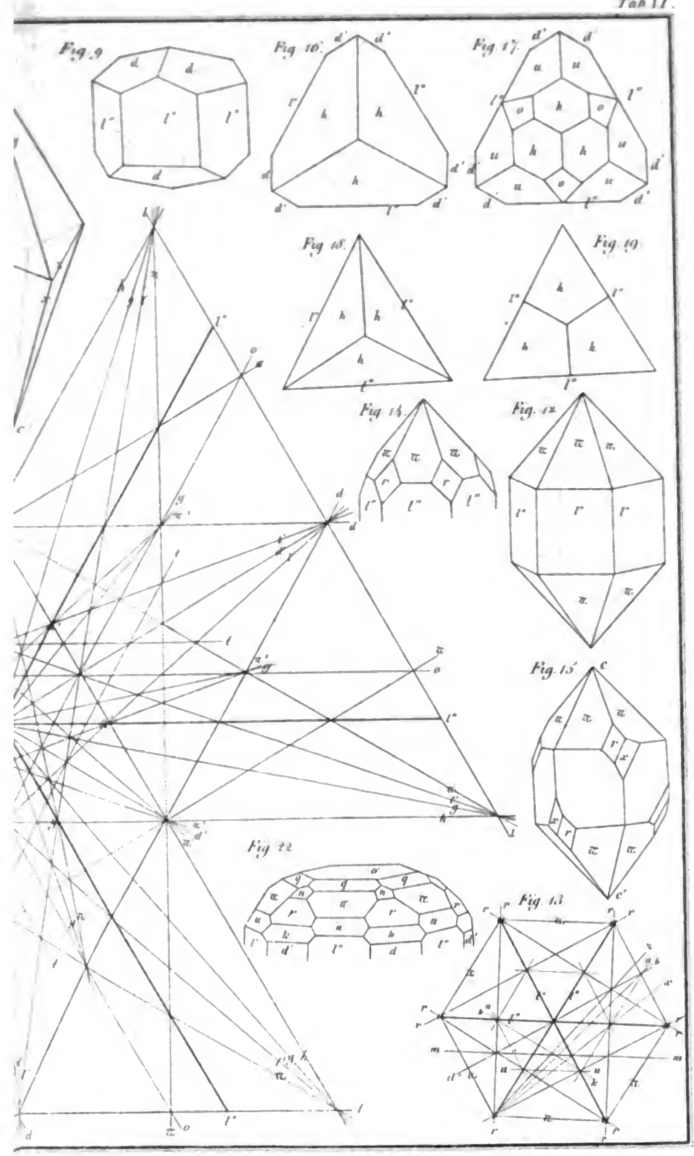
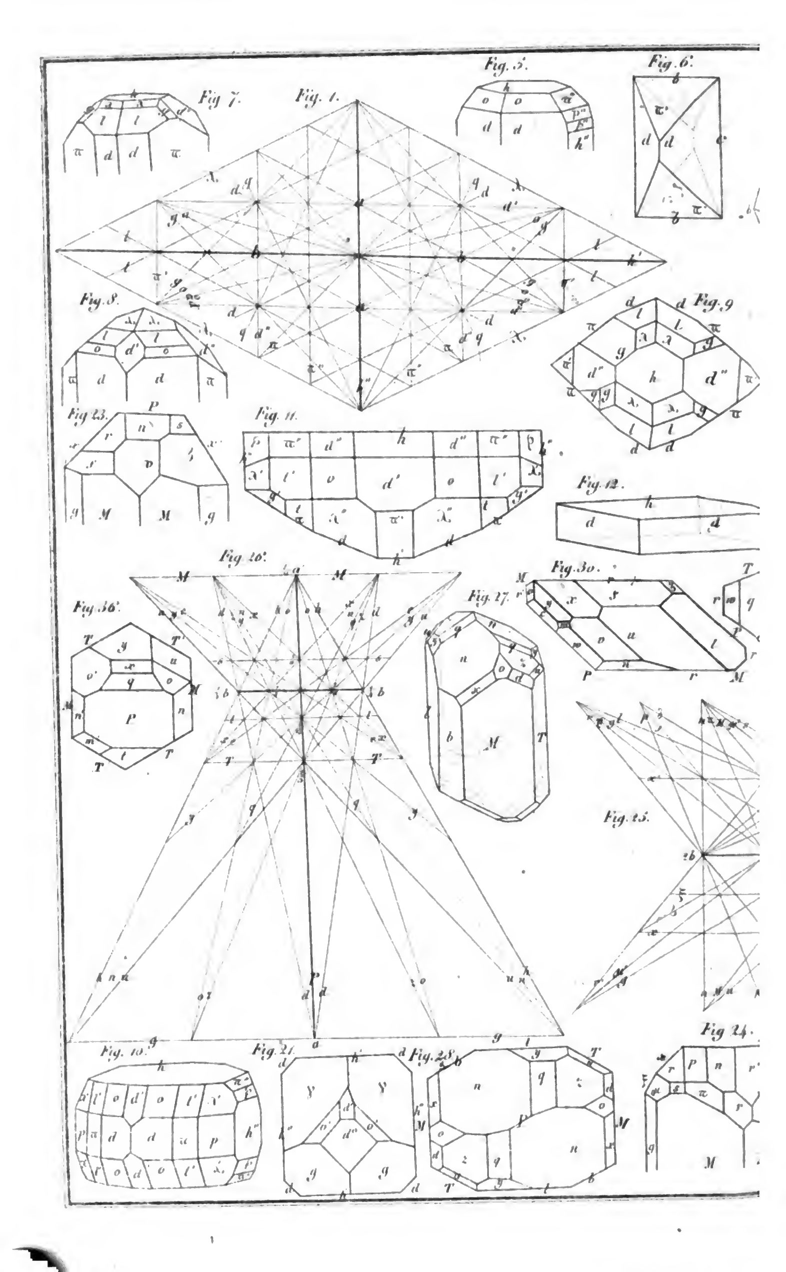
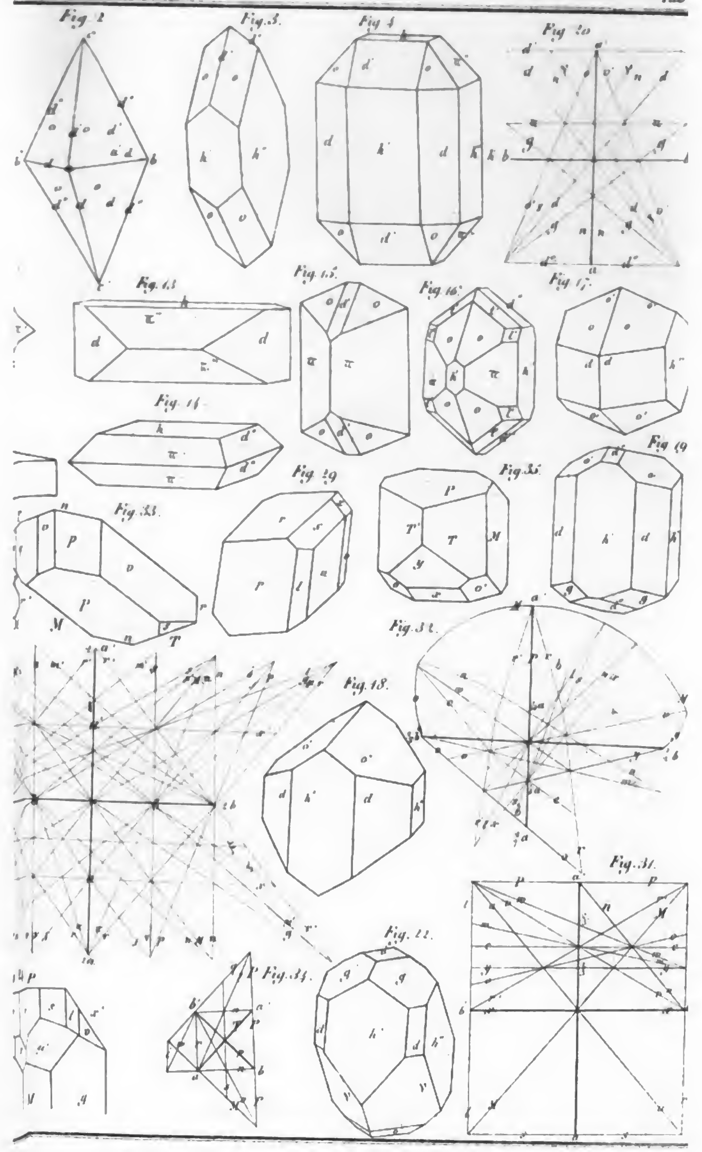


Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7
Fig 10.
Fig. 12
Fig. 13.
Fig. 23.
Fig. 18.
Fig. 11.
Fig. 34.
Fig. 37.
Fig. 31.
Fig. 14.
Fig 30.
Fig. 38.


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 10.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 8.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 20.
Fig. 21.


Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 14.
Fig. 12.
Fig. 15.
Fig. 22
Fig. 13


Fig. 1.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 21.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 30.
Fig. 36.


Tab
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 20
Fig. 13
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 14
Fig. 29
Fig. 35.
Fig. 19
Fig. 33.
Fig. 32.
Fig. 18.
Fig. 31.
Fig. 22.
Fig. 34.



